Clase 8 09/14 Anillos y módulos.

## Productos tensoriales

① Bimódulos $A$ anillo, los $A$-módulos a izquierda se denotan como $A$-mod ó ${}_A\mathcal{M}$ y los morfismos entre $M, N \in {}_A\mathcal{M}$ son flechas $f: M \to N$ : $f(m+n) = f(m) + f(n)$ $f(am) = af(m)$
(Recordar que $M \in {}_A\mathcal{M}$ tiene dos operaciones como los e. vectoriales $+ : M \times M \to M$ $\cdot : A \times M \to M$ con los mismos axiomas que los espacios vectoriales)

→ Los $A$-módulos a derecha se denotan mod-$A$ ó $\mathcal{M}_A$

**Los axiomas** ahora son que existe una suma $+ : M \times M \to M$ y un producto a la derecha $\cdot : M \times A \to M$ $(m, a) \mapsto m.a$ y los axiomas ahora son $(m+n).a = m.a + n.a$ y $(m.a).b = m.(ab)$

Los morfismos verifican $f(m+n) = f(m) + f(n)$
$f(m.a) = f(m).a$

→ Si $A$ y $B$ son anillos los $(A,B)$-bimódulos son ${}_A\mathcal{M}_B$
$M \in {}_A\mathcal{M}$ $M \in \mathcal{M}_B$ o sea una suma y producto de los dos lados. $A \times M \to M$ $M \times B \to M$ con todos los mismos axiomas por separados y juntos el siguiente $(a.m).b = a.(m.b)$ y los morfismos son tales que preservan todo
$$f(m+n) = f(m) + f(n) \quad f(a.m) = a \cdot f(m)$$
$$f(m.b) = f(m).b.$$

## Ejemplos de bimódulos.

Si $M$ es un grupo abeliano $M$ es un $\mathbb{Z}$-modulo
$\therefore$ $\mathbb{Z} \times M \to M$ $\quad 2.m = m+m \quad 0.m = 0$ $\quad$ etc
$-2.m = -m + (-m) = 2.(-m)$

. Eso puede hacerse a la izquierda o a la derecha $m2 = m+m$

$M \in {}_A\mathcal{M}$ si existen $+ : M \times M \to M$ ; $\cdot : A \times M \to M$ tal que $(M, +, 0)$ es un grupo abeliano y el producto $\begin{cases} a.(a'.m) = (aa').m \\ 1.m = m \end{cases}$

y cumple las cond de coherencia de $+$ y $\cdot$ siguientes

$$\begin{cases} (a+b).m = a.m + b.m \\ 0.m = 0 \\ a.(m+n) = a.m + a.n \end{cases}$$

$m.(a+b) = m.a + m.b$

$(m.a).a' = m.(aa')$

Derecha

$f$ es un morfismo de $A$-modulo si $f(m+n) = f(m) + f(n)$

$f(a.m) = a.f(m)$

de $\mathrm{Mod}\text{-}A$ $\quad f(m.a) = f(m).a$

$A^{M}$ es también $A^{M}_{\mathbb{Z}}$ $\qquad a \cdot m \qquad m \cdot z = \underbrace{z + \cdots + z}_{m}$

$$(a \cdot m) \cdot z = a \cdot (m \cdot z)$$

$$\underbrace{a \cdot m + \cdots + a \cdot m}_{z} = a \cdot (\underbrace{m + \cdots + m}_{z})$$

Es claro entonces que ${}_A\mathcal{M} = {}_A\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$; $\mathcal{M}_A = {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}_A$

Ejemplos menos triviales.

$M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad A = M_n(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{R}^n$ es $M$

$X \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad u \in \mathbb{R}^n$ $\quad X \cdot u = Xu$ — producto de matriz por vector. Acción izquierda $(\;)(\;)$ $\quad (\;)(\;)$

Si $v \in \mathbb{R}^n$ $X \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad v \cdot X = v^t X$ y es claro que con esas dos acciones $\mathbb{R}^n$ es un ${}_{M_n(\mathbb{R})}\mathcal{M}_{M_n(\mathbb{R})}$.

El axioma crucial a verificar es $(a \cdot m) \cdot b = a \cdot (m \cdot b)$ y acá tenemos:

$$(X \cdot v) \cdot Y = (Xv) \cdot Y = XvY$$
$$X \cdot (v \cdot Y) = X \cdot (vY) = XvY$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Producto tensorial de bimódulos

$A, R$ y $S$ anillos

Si $(M, N)$ es un par de bimódulos con $M \in {}_R\mathcal{M}_A$; $N \in {}_A\mathcal{M}_S$

$\Rightarrow M \otimes_A N \in {}_R\mathcal{M}_S$ que

$$\otimes_A : {}_R\mathcal{M}_A \times {}_A\mathcal{M}_S \longrightarrow {}_R\mathcal{M}_S$$
$$\quad M \qquad\qquad N \qquad\qquad M \otimes_A N$$

Propiedad básica. El producto tensorial lleva transformaciones bilineales en transformaciones lineales.

$H \subset G \quad \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h = e_H$

$\left(\sum a_g g\right)h = \sum a_g (gh)$

$h\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g (hg)$

$h' e_H = \frac{1}{|H|}\left\{\sum_{h\in H} h'h\right.$

$h' : G \to G$
$g \mapsto h'g$

$a_g = 1 \quad g \in H$
$a_g = 0 \quad g \notin H$

$\boxed{\text{biyección}}$

$\sum_{h\in H} h = \sum_{h\in H} h'h$

$a_g = \frac{1}{|H|} \quad g \in H$
$a_g = 0 \quad g \notin H$

$h' e_H = e_H$

$e_H = h' e_H \quad \forall h' \in H, \quad e_H = e_H e_H = e_H^2$

$+$

$|H|$

$\sum_{h\in H} h = |H| e_H$

$0$

$|H| e_H = \left(\sum_{h'\in H} h'\right) e_H = |H| e_H e_H$

$\cancel{|H|} e_H = \cancel{|H|} e_H^2$

$\left(\sum a_g g\right) h = \sum a_g gh$

$\left\{\sum a_g g\right\} \in kG$

$G = \{1, \sigma, \sigma^2\} \quad \sigma^3 = 1$

$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{\ell\in G} b_\ell \ell\right)$ (1)

$1 - \sigma + \frac{1}{7}\sigma^2 \quad \in \quad \mathbb{Q}G$

no tiene subgrupo

$= \sum_{\ell\in G} b_\ell \left(\sum_{g\in G} a_g g \ell\right)$ (3)

$e = \frac{1}{3}(1 + \sigma + \sigma^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sigma + \frac{1}{3}\sigma^2$

$H = \{1\} \quad \{1, \sigma, \sigma^2\} = H$

$kG$

$\sum_{\ell\in G} b_\ell \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\ell$ (2)

$e_H = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h$

$1 + \sigma$

$\mathbb{Z}_2$

$G = \{1, \sigma\} \quad \sigma^2 = 1$

$\mathbb{Q}G = \{a_1 \cdot 1 + a_\sigma \sigma : \sigma \in \mathbb{Q}\}$

| | 1 | $\sigma$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $\sigma$ |
| $\sigma$ | $\sigma$ | 1 |

$(a_0 + a_1 X)(b_0 + b_1 X) \qquad X^2 \quad X^1$

$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + a_1 b_1 X^2$

$(a_1 1 + a_\sigma \sigma)(b_1 1 + b_\sigma \sigma)$

$= a_1 b_1 + a_1 b_\sigma \sigma + a_\sigma b_1 \sigma + a_\sigma b_\sigma \sigma^2 = (a_1 b_1 + a_\sigma b_\sigma) + (a_1 b_\sigma + a_\sigma b_1)\sigma$

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sigma + \frac{1}{4}\sigma + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma$

$1 \quad 1\,1 \quad \sigma\sigma$

$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{\ell\in G} b_\ell \ell\right) = \sum_{\substack{g\in G\\ \ell\in G}} a_g b_\ell \, g\ell$

$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{\ell\in G} b_\ell \ell\right) = \sum_{x\in G}\left(\sum_{\{g\in G,\, \ell\in G :\, g\ell = x\}} a_g b_\ell\right) x$

$(a_1 1 + a_\sigma \sigma) \times (b_1 1 + b_\sigma \sigma) = \sum (a_1 1 + a_\sigma \sigma)(b_1 1 + b_\sigma \sigma)$

$= \sum a_1 b_1 \underbrace{1\,1}_{1} + a_1 b_\sigma \underbrace{1\sigma}_{\sigma} + a_\sigma b_1 \underbrace{\sigma 1}_{\sigma} + a_\sigma b_\sigma \underbrace{\sigma\sigma}_{1}$

$(a_1b_1+a_\sigma b_\sigma).1 + (a_1 b_\sigma + a_\sigma b_1)\sigma$

$\boxed{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3 \quad \sigma^4 = 1}$ $(a_1 1 + a_\sigma \sigma + a_{\sigma^2}\sigma^2 + a_{\sigma^3}\sigma^3)(\ldots\ldots)$

$(a_1 1 + a_\sigma \sigma)(b_1 1 + b_\sigma \sigma)$

$= a_1 b_1 1 + a_1 b_\sigma \sigma + \ldots$

1

$(1,a), (1,b)$

$(1,c)$.

| | 1 | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | a | b | c |
| a | a | 1 | c | b |
| b | b | c | 1 | a |
| c | c | b | a | 1 |

$|H| / |G|$

G $\frac{1}{4}(1+a+b+c)$

$\frac{1}{2}(1+a)$

$\frac{1}{2}(1+b)$

order 4 $\frac{1}{2}(1+c)$

$(\lambda_1 1 + \lambda_a a + \lambda_b b + \lambda_c c)$

$(\mu_1 1 + \mu_a a + \mu_b b + \mu_c c)$

a

$= (\lambda_1\mu_1 + \lambda_a\mu_a + \lambda_b\mu_b + \lambda_c\mu_c)\, 1$

e $\{1,a\}\{1,b\}\{1,c\}$ $\{1,a,b,c\}$

1 2

$A/_I$ $[a][b] = [ab]$

$\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ $[0]\ [1]\ [2]\ [3]\ [4]\ [5]$

$[2][4] = 8 = 2 \pmod 6$

$[2][3] = 6 = 0$

$[0]^2 = [0]\quad [1]^2 = 1 \quad [3]^2 = [9] = [3] \quad [4]^2 = 16 = [4]$