Clase 7 09/08 ANILLOS Y MÓDULOS

BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRUPOS

En la medida en que avanzamos en la teoría de anillos de grupo necesitamos ver mejor a algunas propiedades de los grupos

Los grupos son los objetos algebraicos más simples. Simplemente un conjunto G una operación de multiplicación $m: G\times G \to G$ $m(x,y) = x\cdot y$ en que m es asociativo y todo elemento tiene inverso y existe un neutro de la operación $m(x,y) = xy$ (notación) $\forall x \in G\ \exists x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Morfismo de grupos $f: G \to H$ que verifica : $* f(xy) = f(x) f(y)$ $* f(e) = e$ $* f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Subgrupo un subconjunto $H \subset G$: $\forall h, h' \in H, hh' \in H$ y $h^{-1} \in H$.

Subgrupo normal es un subgrupo H que además tiene la siguiente propiedad $\forall x \in G,\ \underbrace{xHx^{-1}}_{xH = Hx} = H$ $\quad H \triangleleft G$ notación para subgrupo normal

Relación de equivalencia

$x, y \in G$, $x \sim_H y$ si $\exists h \in H$: $x = hy$ de donde se deduce que $x = y(\underbrace{y^{-1}hy}_{h'})$ luego también existe $h' \in H$: $x = yh'$. (Ejercicio $\sim$ es una rel de equiv)

Coclases bilaterales

G, H

Dado $H \triangleleft G$ definimos la clase de equivalencia bilateral de $x \in G$ como el subconjunto de G $[x] = \{y \in G : \exists h \in H : y = xh\}$ (o $\exists h' \in H : y = h'x$)

También podemos escribir $[x] = xH = Hx \subset G$

Grupo cociente Se toma el conjunto de dichas clases y se denota como $G/H = \{[x] : x \in G\} = \{xH : x \in G\} \subseteq \mathcal{P}(G)$ pues $xH \subset G$

Operaciones Producto: $[x][y] = [xy]$, Identidad: $1_{G/H} = [1_G] = H \in \mathcal{P}(G)$

Inversa: $[x]^{-1} = [x^{-1}]$

Ejercicio Probar que esas definiciones tienen sentido p.e. $x \sim_H y \Rightarrow x^{-1} \sim_H y^{-1}$, Dem $x = hy \to x^{-1} = (hy)^{-1} = y^{-1}h^{-1} \Rightarrow x^{-1} \sim y^{-1}$.

Observación Las operaciones fueron definidas para lo siguiente: Si definimos $\pi : G \to G/H$ $\pi(x) = [x] \Rightarrow \pi$ es un morfismo de grupos y $\operatorname{Ker}\pi = \{x \in G : [x] = 1_{G/H}\}$, $[x] = [1_G]$ $xh = 1_G \Rightarrow x = h^{-1} \Rightarrow x \in H$

Luego $\operatorname{Ker}\pi = H$. El grupo cociente es el par $(G/H, \pi : G \to G/H)$

Construcciones en anillos de grupo.

(1) Functorialidad

Si G y G' son grupos y $f: G \to G'$ un homomorfismo de grupos $\Rightarrow$ $f^*: kG \to kG'$ $f^*(\sum a_g g) = \sum a_g f(g)$ es un homomorfismo de anillos.

1) Si f es inyectiva f^* también lo es e.g. $f^*(\sum a_g g) = \sum a_g f(g) = 0 \Rightarrow a_g = 0$

k fijo. Grupos $\xrightarrow{\text{Functorial}}$ Anillos

$$G \rightsquigarrow kG$$

$$\begin{array}{ccc} G & & kG \\ \downarrow f & & f^* \downarrow \\ G' & & kG' \end{array}$$

$$f^*\left(\sum a_g g + \sum b_g g\right) = f^*\left(\sum_g (a_g + b_g) g\right) = \sum_g (a_g + b_g) f(g)$$

$$= \sum_{g \in G} a_g f(g) + \sum_{g \in G} b_g f(g) = f^*\left(\sum a_g g\right) + f^*\left(\sum b_g g\right)$$

$$\underbrace{\left(\sum_g a_g g\right)}_{\alpha} \cdot \underbrace{\left(\sum_h b_h h\right)}_{\beta} = \sum_{x \in G} \left(\sum_{gh = x} a_g b_h\right) x$$

$$G \xrightarrow{f} G'$$
$$kG \xrightarrow{f^*} kG'$$

$$f^*(\alpha\beta) = f^*(\alpha) f^*(\beta)$$

$$f^*(\alpha\beta) = \sum_{x \in G} \left(\sum_{gh=x} a_g b_h\right) f(x)$$

$$f^*(\alpha) \cdot f^*(\beta) = \left(\sum_{g \in G} a_g f(g)\right)\left(\sum_{h \in G} b_h f(h)\right)$$

$$= \sum_{g,h \in G} a_g b_h f(g) f(h) = \sum_{g,h \in G} a_g b_h f(gh) = \sum_{x \in G} \left(\sum_{gh = x} a_g b_h\right) f(x)$$

$C_4 \quad \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3 : \sigma^4 = 1\}$

$C_2 \quad \{1, \sigma^2, 1, \sigma^2\} = \{1, \tau : \tau^2 = 1\}$

$x \xrightarrow{f} x^2$

$(xy) \longrightarrow (xy)^2 = x^2 y^2$

$f(xy) = f(x) f(y)$

$2 \cdot 1 + 3\sigma + 4\sigma^2 + 5\sigma^3$

$2 \cdot 1 + 3\tau + 4 \cdot 1 + 5\tau = 6 \cdot 1 + 8\tau$

$\mathbb{R} \xrightarrow[\text{id}]{f} \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longrightarrow \bar{z}$ $\quad$ $i^2 = -1$ $\quad$ $f(i)^2 = f(-1) = -1$

$\mathbb{Q} \xrightarrow[\text{id}]{} \mathbb{Q}$ $\quad$ $\sigma\left(\frac{a}{b}\right)\sigma(b) = \sigma(a) = a\sigma(1) = a$

$\sigma\left(a/b\right) = \dfrac{a}{\sigma(b)} = a/b$

$f(i) : f(i)^2 = -1$

$i \quad -i \in \mathbb{C}$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad f(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

FIN CLASE SIETE

Luego $a_g = 0$. (recordar la definición de 0 en kG)

2) f sobreyectiva $\Rightarrow f^*$ sobreyectiva. Dado $f: G \to G'$ y un elemento ξ de kG'; $\xi = \sum a_{g'} g'$. Luego $\exists\, g \in G: f(g) = g'$ pues g' es sobre, luego $\eta = \sum a_{g'} g$ es tal que $f^*(\eta) = \sum a_{g'} f(g) = \sum a_{g'} g' = \xi$.

3) Es claro que si $G = \{e\}$ el grupo trivial $kG \cong k$
Luego si tomamos G arbitrario y $t: G \to \{e\}$ el morfismo trivial $t^*: kG \to k\{e\} = k$ es $t^*(\sum a_g g) = \sum a_g t(g) = \sum a_g$
Tenemos lo que se llama el morfismo de aumento en kG

4) Ideal de aumento $\operatorname{Ker} \varepsilon = I \subset kG$ es un ideal que se llama ideal de aumento.

$\varepsilon(\sum a_g g) = \sum a_g$ – suma de los coeficientes.

$I = \{\sum a_g g : \sum a_g = 0\}$ ie $a_1 = -\sum_{g \neq 1} a_g$ luego

$$\sum a_g g = a_1 g + \sum_{g\neq 1} a_g g = -\Big(\sum_{g\neq 1} a_g\Big) + \sum_{g \neq 1} a_g g = \sum_{g\neq 1} (-a_g + a_g g)$$
$$= \sum_{g \neq 1} a_g (g-1).$$

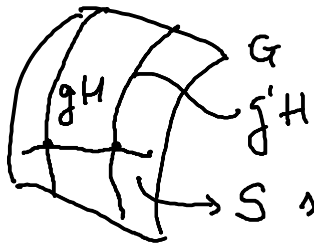
Una base de kG es el grupo G,
Una " " $\operatorname{Ker}\varepsilon$ ideal de aumento, son los elementos $\{g-1 : g \in G \setminus \{1\}\}$

<u>Obs</u> $\operatorname{Ker} \varepsilon$ es un ideal maximal. Si $\operatorname{Ker}\varepsilon \subseteq J \subseteq kG$
$\Rightarrow$ por razones de dimensión es $\operatorname{Ker} \varepsilon$ ó kG.

③ En forma semejante $H \trianglelefteq G \Rightarrow \pi : G \to G/H$ es un homomorfismo $\Longrightarrow$ podemos definir $\pi^* : kG \to k(G/H)$ $\pi^*\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum a_g \pi^*(g) = \sum_{g \in G} a_g [g]$

Observe que si $h \in H$ $\pi(g) = \pi(gh)$ i.e. $[g] = [gh]$

Si tomamos un Sistema de representantes de las clases de G mod H



S sistema de representantes de las clases de G mod H

$$G = \bigcup_{s \in S} [s] = \bigcup_{s \in S} sH \quad \text{y la unión es disjunta}$$

Luego $\pi^*\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g [g] = \sum_{\substack{s \in S \\ h \in H}} a_{sh} [sh] = \sum_{\substack{s \in S \\ h \in H}} a_{sh} [s]$

$$= \sum_{s \in S} \left(\sum_{h \in H} a_{sh}\right) [s] = \sum_{[s] \in G/H} \left(\sum_{h\in H} a_{sh}\right)[s]$$

$$\operatorname{Ker} \pi^* = \left\{\sum a_g g : \sum_{g \in O(s)} a_g = 0\right\}$$

Dominios y divisores de cero.

Def. Los dominios son un tipo especial de anillo. No tienen divisores de cero. Si A es un anillo y $a \in A$ es tal que $\exists\, b \neq 0$: $ab = 0$ se dice que a es un divisor de cero a izquierda. (a derecha es lo mismo del lado derecho

Ejemplo Sea G un grupo cualquiera x un elemento de orden n.
Tenemos que $(1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) = 1-x^n = 0$ en $\mathbb{Q}G$

Luego $1-x \in \mathbb{Q}[G]$ es un divisor de cero a ambos lados en el anillo de grupo.

Osea hay una relación entre los divisores de cero de G y el orden de un elemento de G.