Clase 6 07/09/23 **Anillos y módulos**

Dado un grupo G arbitrario y un cuerpo k (en general pero también puede ser $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$). Se define el anillo de grupo que se denota kG. Suponemos G finito

$kG = \left\{ \sum_{g\in G} a_g g \cdot a_g \in k, g \in G \right\}$ ó $kG = \{(a_g)\}_{g\in G}; \ a_g \in k \}$

$1_{kG} = \sum_{g\in G} \lambda_g g$ con $\lambda_g = 0 \quad g \neq e$, $\lambda_g = 1 \quad g = e$ $\quad 1_{kG} = 1 \cdot e \Big\}$ $1_{kG} = (1, 0, \cdots, 0)$

$0_{kG} = \sum_{g\in G} 0_g$ osea $\lambda_g = 0 \ \forall g$ $\Big\}$ $0_{kG} = (0, 0, \cdots, 0)$

OPERACIONES

SUMA

$\sum \lambda_g g + \sum \mu_g g = \sum (\lambda_g + \mu_g) g$ $\quad \{\lambda_g\}_{g\in G} + \{\mu_g\}_{g\in G} = \{\lambda_g + \mu_g\}_{g\in G}$

Ejercicio Probar que los axiomas que rigen la suma en un anillo son válidos

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in kG$
- $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- $\forall \alpha \ \exists -\alpha : \ \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$
- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ $\qquad kG \supset G$

$\sum_{g\in G} \lambda_{gh^{-1}} g$

PRODUCTO

$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) h = \sum_{g\in G} \lambda_g (gh)$. Se multiplica por h un elemento genérico de G y se suman

p.e $G = \{1, \sigma, \sigma^2 : \sigma^3 = 1\}$ tomo p.e $\alpha = 2\,1 + 3\sigma + 4\sigma^2 \in kG$ multiplico por σ

$\alpha\sigma = 2\sigma + 3\sigma^2 + 4\sigma^3 = 4\,1 + 2\sigma + 3\sigma^2 =$

Si queremos multiplicar $\alpha = 1 + \sigma + \sigma^2$ por $\beta = 1 - \sigma + \sigma^2$

Fórmula $\left(\sum_{g\in G} g\right)h = \sum_{g\in G} gh = \sum_{g\in G} g \quad \left(\sum_{g\in G} g\right)(h-1) = 0$

Se procede usando la distributiva y asociativa

$$(1+\sigma+\sigma^2)(1-\sigma+\sigma^2) = (1+\sigma+\sigma^2)\cdot 1 + (1+\sigma+\sigma^2)(-\sigma) + (1+\sigma+\sigma^2)\sigma^2$$

$$= 1+\sigma+\sigma^2 - (\sigma+\sigma^2+1) + (\sigma^2+1+\sigma) = 1+\sigma+\sigma^2$$

Formalmente $\underbrace{\left(\sum \lambda_g g\right)}_{\xi}\underbrace{\left(\sum \mu_h h\right)}_{\eta} = \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h (gh)$ ⇝ aparecen repeticiones

p.e. $1, \sigma, \sigma^2$ $\quad 1 = \sigma\cdot\sigma^2 = \sigma^2\cdot\sigma$. Si juntamos los repetidos

$\xi\cdot\eta = \sum_{x\in G}\left(\sum_{gh=x} \lambda_g \mu_h\right) x$ → forma natural de escribir localizando el coeficiente de cada $x\in G$. Mirando la tabla del producto es fácil

p.c un grupo dado como arriba

$\{1,\sigma,\sigma^2\}$, $\sigma^3=1$ cíclico con tres elementos

	1	σ	σ^2
1	1	σ	σ^2
σ	σ	σ^2	1
σ^2	σ^2	1	σ

$2+\sigma-7\sigma^2$

$1+\sigma$

$2+2\sigma+\sigma+\sigma^2-7\sigma^2-7\sigma^3$

$= 2+2\sigma+\sigma+\sigma^2-7\sigma^2-7 = -5+3\sigma-6\sigma^2$

Ejercicio En un grupo con cuatro elementos con la siguiente tabla de productos

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

calcular $(a+b+c)(a+b+c)$ $\quad (1+a+b+c)(1-a-b-c)$

$(3a+2b+c)(1+7b+5c)$

Construcciones en anillos de grupo.

Grupo, subgrupo, subgrupo normal (Repaso) y bases

El anillo de grupo kG es un k-espacio vectorial $\quad \lambda\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G}(\lambda a_g) g$

y G es una base. Por definición lo genera y es l.i.

kG es un espacio vectorial de base G que es un grupo. (Recíproco).

Los grupos son los objetos algebraicos más simples. Simplemente un conjunto G una operación de multiplicación $m: G\times G \to G$ $m(x,y) = x\cdot y$ en que m es asociativo y todo elemento tiene inverso y existe un neutro de la operación $m(x,y) = xy$ (notación)
$\forall x \in G \ \exists x^{-1} : x x^{-1} = x^{-1} x = e$.

Morfismo de grupos $f: G \to H$ que lleva $xy \rightsquigarrow f(xy) = f(x) f(y)$
$f(e) = e \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Subgrupo un subconjunto $H \subset G$: $h, h' \in H \quad hh' \in H \quad h^{-1} \in H$

Subgrupo normal es un subgrupo H que además tiene la siguiente propiedad
$\forall x \in G$. $xHx^{-1} = H$. $\quad H \triangleleft G$ notación para subg. normal

Obs $x \underset{H}{\sim} y$ si $\exists h \in H$: $x = hy = y \underbrace{y^{-1}hy}_{\in H}$ (luego también $\exists h' : x = yh'$.

y $G/H = \{[x] : x \in G\}$

<u>Obs</u> Si llamo $[x]$ a la clase de equivalencia de x, podemos definir $[x]\cdot[y] = [xy]$ y $[e] = e_{G/H}$ $\quad [x]^{-1} = [x^{-1}]$ tenemos un grupo G/H y un morfismo de grupos $\pi : G \to G/H$ $\ker \pi = H$.

Construcciones de anillos de grupo.

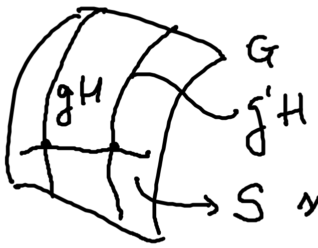
① Sea $H \subset G$ un subgrupo cualquiera y es claro que kH se puede definir y resulta que $kH \subset kG$ es un subanillo que es también un anillo de grupo.

② Si G y G' son grupos es y $f: G \to G'$ un homomorfismo de grupos $\Rightarrow$
$f^*: kG \to kG'$ $f^*(\sum a_g g) = \sum a_g f(g)$ es un homomorfismo de anillos.

③ En forma semejante $H \triangleleft G \Rightarrow \pi : G \to G/H$ es un homomorfismo $\Rightarrow$ podemos definir $\pi^* : kG \to k(G/H)$ $\quad \pi^*\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum a_g \pi^*(g) = \sum_{g\in G} a_g [g]$

Observe que si $h \in H$ $\pi(g) = \pi(gh)$ i.e. $[g] = [gh]$

Si tomamos un sistema de representantes de las clases de G mod H



S sistema de representantes de las clases de G mod H

$$G = \bigcup_{s\in S} [s] = \bigcup_{s\in S} sH$$ y la unión es disjunta

Luego $$\pi^*\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g [g] = \sum_{\substack{s\in S \\ h\in H}} a_{sh} [sh] = \sum_{\substack{s\in S \\ h\in H}} a_{sh} [s]$$

$$= \sum_{s\in S} \left(\sum_{h\in H} a_{sh}\right) [s] = \sum_{[s]\in G/H} \left(\sum_{h\in H} a_{sh}\right) [s]$$

$$\operatorname{Ker} \pi^* = \left\{ \sum a_g g : \sum_{g\in O(s)} a_g = 0 \right\}$$

Dominios y divisores de cero.

Def. Los dominios son un tipo especial de anillo. No tienen divisores de cero. Si A es un anillo y $a \in A$ es tal que $\exists\, b \neq 0$: $ab = 0$ se dice que a es un divisor de cero a izquierda. (a derecha es lo mismo del lado derecho

Ejemplo Sea G un grupo cualquiera x un elemento de orden n. Tenemos que $(1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) = 1-x^n = 0$ en $\mathbb{Q}G$

Luego $1-x \in \mathbb{Q}[G]$ es un divisor de cero a ambos lados en el anillo de grupo.

Osea hay una relación entre los divisores de cero de G y el orden de un elemento de G.

Otra relación de ese tipo.

Se define una función lineal