Clase 5 080123 ANILLOS Y MÓDULOS

Motivación de la def de módulo

Anillos $\rightsquigarrow$ Modulos

$\mathbb{R}$(campos) $\rightsquigarrow$ Espacios vectoriales

V es un espacio vectorial / $\mathbb{R}$ si tiene

$\begin{cases} \text{una operación de suma} \\ \text{una operación de producto por un escalar} \end{cases}$

$\parallel$ Axiomas

$$(V,+)\quad \begin{cases} (v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3) \\ v_1+v_2 = v_2+v_1 \\ \exists\, 0\in V : \quad 0+v = v+0 = v \quad \forall v\in V. \\ \forall v\in V \quad \exists -v : \quad v+(-v) = (-v)+v = 0 \end{cases}$$

Estos axiomas dicen sola y simplemente que $(V,+)$ es un grupo abeliano.

Axiomas para el producto en espacios vectoriales

$(V, \cdot)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R} \quad v \in V \quad \exists \quad \lambda v$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w \\ \lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v \\ 1 \cdot v = v \\ (\lambda+\mu)\cdot v = \lambda v + \mu v \\ 0 \cdot v = v \end{array}\right.$$

Si λ es un elemento de un anillo estos axiomas se pueden formular idénticos para $\lambda \in A$ $\quad v \in M$

Dado un anillo A y un grupo abeliano $(M, +)$

$\mathbb{R}$ " " " " V

Si simplemente dejamos los axiomas de las operaciones y cambiamos el cuerpo por un anillo y al grupo abeliano lo llamamos V en el caso de espacios vectoriales y M en el caso de módulos tenemos los mismos axiomas

$\exists \quad A \times M \xrightarrow{\cdot} M \quad (a, m) \to a \cdot m$

y axiomas que son lo mismos
que para espacio vectorial

$(\lambda, v) \to \lambda v$

DEFINICIÓN EXPLÍCITA DE MÓDULO PARA UN ANILLO

Def

Si $(A, +, \cdot)$ anillo cualquiera una estructura de A-modulo en un grupo abeliano $(M, +)$ es una función

$$A \times M \longrightarrow M$$
$$(a, m) \longrightarrow a \cdot m$$

Ligados las dos estructuras por los siguientes axiomas

$$a, b, c \in A \quad m, n \in M$$

1. $a\cdot(b\cdot m) = (ab)\cdot m$

2. $1\cdot m = m$

3. $(a+b)\cdot m = a\cdot m + b\cdot m$

4. $a\cdot(m+n) = a\cdot m + a\cdot n$

5. $a\cdot 0 = 0$

EJEMPLOS

Ejemplo trivial

Un grupo abeliano $(M,+)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo.

$$z\in\mathbb{Z} \quad m\in M \qquad z\cdot m \begin{cases} \underbrace{m+\cdots+m}_{z} & z>0 \\ 0 & z=0 \\ \underbrace{-m+(-m)+\cdots+(-m)}_{-z} & z<0 \end{cases}$$

Ejemplos ligados con espacios vectoriales

I) $M \in A\text{-mod} \xleftarrow{\text{generalización}} V \in \mathbb{R}\text{-vect}$

Un A-modulo donde $A = \mathbb{R}$ es exactamente un espacio vectorial

II)

Sea un par (V,T) donde V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y

$T: V \to V$ es una transformación lineal.

Con estos elementos le podemos dar a V una estructura de $\mathbb{R}[x]$-modulo.

Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$$p(x) \cdot v = a_0 v + a_1 T v + a_2 T^2 v + \dots + a_n T^n v$$

$p(x) \cdot (v+w) = p(x) \cdot v + p(x) \cdot w$ como se comprueba directamente pues $T, T^2, T^3, \dots T^n$ son transf. lineales se generalizan

espacios vect $\longrightarrow$ Modulos

$v = \lambda w \qquad \lambda^{-1} v = w$

$\lambda \neq 0$

$v \in \langle w \rangle \iff w \in \langle v \rangle$

pero al no tener inversión de los escalares se complica p.e lo de arriba no se puede hacer

En el caso de (V,T) y el módulo V sobre $\mathbb{R}[X]$. Si $m = Tn \Rightarrow m \in \langle n \rangle$ porque $m = X \cdot n$

Pero a priori no es cierto que $n \in \langle m \rangle$ porque debería cumplir que $\exists\, p(x) : p(x) \cdot m = n$ y eso puede no pasar (Ejercicio)

Otro tipo de problemas

En esp. vectoriales si $W \subset V$ es un subespacio existe $W' \div W \oplus W' = V$.

Esto se hace completando una base de W a una base de V

<u>Def</u> Si se define submódulo como se define subespacio. Sea M un A-mod

$N \subset M$ es un submódulo si $\forall\, n, n' \in N \Rightarrow n + n' \in N$ y $\forall\, n \in N$ y $\forall\, a \in A$ $a.n \in N$. No es verdad que N tiene su complemento

Módulos a derecha a izquierdo y bilaterales.

Hemos definido para un anillo A el concepto de A-mod izquierdo
la propiedad básica es la siguiente existe un mapa $A \times M \to M$ que
denotamos $(a, m) \longrightarrow (a \to m)$ escribimos la flecha para que quede
clara la dirección.
El axioma básico es $a \to (a' \to m) = (aa') \to m$

Se define A-mod derecho mediante un mapa $M \times A \longrightarrow M$ que
denotamos $(m, a) \longrightarrow (m \leftarrow a)$.
El axioma básico es $(m \leftarrow a) \leftarrow b = m \leftarrow (ab)$

El intento de definir $m \leftarrow a \underset{def}{=} a \to m$ no funciona porque
la propied básica falla

Siguemos que $(m \leftarrow a) \leftarrow b = m \leftarrow ab$ tendríamos que

$$\begin{matrix} (m \leftarrow a) \leftarrow b & = & m \leftarrow ab \\ \| & & \| \\ b \to (a \to m) = (ba) \to m & & (ab) \to m \end{matrix}$$

Si A^{op} es el anillo que se define mediante la multiplicación $a \cdot_{op} b = ba$

En operatoria de arriba me dice que si $M \in A$-mod mediante $\rightarrow$
y definimos $m \leftarrow a = a \rightarrow m$ M con lo hecho $\leftarrow$ es un $M \in \mathrm{Mod}\, A^{op}$

A anillo $\left[\begin{array}{l} A^{op} = (A, +, \circ_{op}) \\ A = (A, +, \cdot) \end{array}\right.$ $\qquad a \circ_{op} b = ba$

Ejercicio

$(A^{op})^{op} = A$ $\qquad A = A^{op} \Leftrightarrow A$ es conmutativo

$$\boxed{A\text{-mod} \longleftrightarrow \text{mod-}A^{op}}$$

Módulos bilaterales $\quad A$-mod $\quad$ mod-B

M

$(a, m) \rightarrow a \cdot m \qquad (m, b) \rightarrow m \cdot b$

M es un A-modulo un modulo-B y $(a \cdot m) \cdot b = a \cdot (m \cdot b)$
se dice que es un (A,B)-modulo bilateral

Modulos a derecha ⟷ Mod-A ∋ M

" " izquierda ⟷ A-mod ∋ N

" bilaterales ⟷ A-mod-B ∋ N

Un $M \in A$ Mod-A es un A-modulo un modulo-A y tal que $a, a' \in A$ $(a \cdot m) \cdot a' = a \cdot (m \cdot a')$

Ejemplo

$A \in$ A-mod $\quad a \to a' = aa'$

$A \in$ mod-A $\quad a' \leftarrow a = a'a$

$A \in$ A-mod-A

$(a \to a') \leftarrow a''$

$= a \to (a' \leftarrow a'')$

$$(aa')a'' = a(a' \leftarrow a'') = a(a'a'')$$

Anillos de grupo

$\boxed{\text{asociarle un anillo a un grupo cualquiera}}$

Dado un cuerpo cualquiera k y un grupo G cualquiera finito se define el anillo de grupo kG de la siguiente forma.

$$kG = \{ \sum \lambda_g g : \lambda_g \in k \quad g \in G \}$$

$$(\lambda_g \in k : g \in G)$$

$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$

$(a_0\ a_1\ \cdots\ a_n)$