Clase 2.   03/18   Anillos y módulos

Homomorfismos y automorfismos de anillos

Def Sea $f: A \to B$ un homomorfismo de anillos si

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \; ; \; f(ab) = f(a) f(b)$$

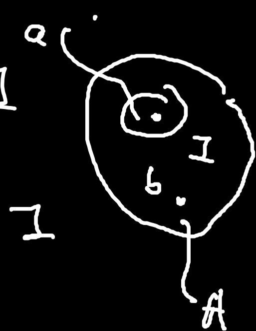
$$f(1_A) = 1_B$$

Obs $f(0_A) = 0_B$. Dem $f(a) = f(0_A + a) = f(0_A) + f(a)$ $(-f(a))$

$$0_B = f(0_A) + f(a) - f(a) = f(0_A)$$

Def $f: A \to B$ $\quad I = \mathrm{Ker}(f) \subset A$ verifica
$\quad = \{a \in A : f(a) = 0\}$

- $a, b \in I \Rightarrow a+b \in I$
- $0 \in I$
- $a \in I$ $b \in A$ $ab \in I$, $ba \in I$



$f: A \to B$ $\quad \mathrm{Im} f = f(A) \subset B$ verifica

- $a, b \in \mathrm{Im} f$ $\quad a+b \in \mathrm{Im} f$
- $a, b \in \mathrm{Im} f$ $\quad ab \in \mathrm{Im} f$
- $1 \in \mathrm{Im} f$

Dem $f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in I$; $a \in I$ $b \in A$ $f(ab) = f(a) f(b) =$
$= 0 \cdot f(b) = 0$ (recordar que $0 \cdot c = 0$) $\Rightarrow ab \in I$

Las propiedades de la imagen son obvias. ∎

Def Sea $B \subset A$: $a, b \in B \Rightarrow ab \in B$, $a+b \in B$ y $0, 1 \in B$

En ese caso se dice que B es un subanillo de A.

Sea $I \subset A$: $a, b \in I \Rightarrow a+b \in I$; $a \in A, b \in I \Rightarrow ab \in I$

; $0 \in I$ se dice que I es un ideal izquierdo

Si sustituimos $a \in A$ $b \in I$ por $a \in I$, $b \in A \Rightarrow ab \in I$

decimos que tenemos un ideal a derecha.

Si se cumplen ambos tenemos un ideal bilateral o ideal.

A anillo $B \subset A$ · $\underbrace{B \pm B \subset B}$ $\underbrace{B \cdot B \subset B}$ $0,1 \in B$

B subanillo

A anillo $I \subset A$ $\underbrace{I \pm I \subset I}$ $\underbrace{A \cdot I \subset I}$ $0 \in I$

I ideal a izquierda

a derecha $I \cdot A \subset I$ $0 \in I$

bilateral $I \pm I \subset I$ $A \cdot I \subset I$ $I A \subset I$

$AIA \subset I$

$\underline{AI}A \subset IA \subset I$

$A = \{ p \in \mathbb{R}[t] : p(t) = p(-t) \} \subseteq \mathbb{R}[t]$

$p, q \in A \Rightarrow pq \in A$ subanillo pero no ideal.

R anillo cualquiera $a \in R$ fijo $aR = \{ ar : r \in R \}$

– el conjunto de los múltiplos de a forman un ideal derecho.

Llamado un ideal principal a derecha

Teorema: Todo ideal de $\mathbb{C}[t]$ es principal.

$I \subset \mathbb{C}[t]$ y sea f un polinomio de grado mínimo no nulo en I.

Si $g \in I$ sea $g = qf + r$ $\begin{cases} \operatorname{gr} r < \operatorname{gr} f \\ r = 0 \end{cases}$

$\underset{I}{g} = q\underset{I}{f} + r \Rightarrow r \in I \Rightarrow r = 0$

o sea $g = qf \in \mathbb{C}[t]f$

o sea g es principal. ∎

Anillos cociente

Obs Si tenemos $\pi : A \to B$ un morfismo de anillos (morfismo = homomorfismo) $\Rightarrow \ker \pi$ es un ideal bilateral

bilateral y recíprocamente si I es un ideal bilateral

$\Rightarrow \exists\, B$ anillo y $\pi : A \to B$ morfismo : $\ker \pi = I$

Dem $a \in \ker \pi$ $b, c \in A$ $bac \in \ker \pi$ $\pi(bac) = \pi(b)\, 0\, \pi(c) = 0$

Recíproco Si I es un ideal bilateral defino una relación de equivalencia en A; $a \sim_I b \iff a - b \in I$.

$a \sim b$ $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ $a - b \in I$ $b - c \in I \Rightarrow a - b + b - c \in I \Rightarrow a - c \in I$

$a \sim a$ $a - a = 0 \in I$

$a \sim b \to b \sim a$ $a - b \in I \Rightarrow b - a \in I$.

$A/I = \{ [a] : a \in A \}$ la proy canónica $\pi : A \to A/I$, $a \xrightarrow{\pi} [a]$

Definimos una estructura de anillo en $A/_I$

$[a]+[b]=[a+b]$ df $\qquad [a]=\{b\in A:\ a\sim b\}\subset A$

$[a]\cdot[b]=[ab]$ $\qquad a\sim b \iff a-b\in I$

$0_{A/_I}=[0]$

$1_{A/_I}=[1]$

$a\sim a'$, $b\sim b'$ $\qquad a+b\sim a'+b'$ $\qquad a+b-(a'+b')=$

$=(a-a')+(b-b')\in I+I\in I$

$a\sim a'$, $b\sim b'$ $\qquad ab\sim a'b'$ $\qquad ab-a'b'=ab-a'b+a'b-a'b'$

$=(a-a')b+a'(b-b')\in IA+AI\subset I+I\subset I$

Luego $A/_I$ es un anillo y $\pi: A\to A/_I$, $a\to\pi(a)=[a]$ es un homomorfismo.

$\pi(ab)=[ab]=[a]\cdot[b]=\pi(a)\pi(b)$

$\pi(a+b)=[a+b]=[a]+[b]$

$\underline{\mathrm{Ker}\,\pi}=\{a:\ \pi(a)=0\}$. $\pi(a)=0\iff[a]=0\iff a-0\in I$

$\iff a\in I$ $\qquad \mathrm{Ker}\,\pi=I$.

Teorema A anillo I ideal bilateral
$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\pi"] \\ A/_I \end{tikzcd} \qquad I=\mathrm{Ker}\,\pi$$

El par $(A/_I, \pi)$ verifica la siguiente propiedad universal

$\forall (B,\gamma)$:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\gamma"] \\ B \end{tikzcd}$$
homomorfismo γ, B anillo y $I\subset\mathrm{Ker}\,\gamma$

existe $\hat{\gamma}: A/_I\to B$: el diagrama
$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ A/_I \arrow[r, "\hat{\gamma}"] & B \end{tikzcd}$$

(o sea $\hat{\gamma}\pi=\gamma$)

Sea $\hat{\gamma}([a]) = \gamma(a)$ $\quad [a] = \pi(a)$ $\quad I \subset \ker \gamma$

si $a \sim b \Rightarrow \gamma(a) = \gamma(b) \longleftrightarrow$

$a - b \in I \quad \gamma(a-b) \in \gamma(I) = 0 \quad \Rightarrow \gamma(a) - \gamma(b) = 0$

$\Rightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$ $\blacksquare$

<u>Ejemplo</u> $\mathbb{R}[t] \quad I = t^2\mathbb{R}[t] = \{a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n \ldots\}$

$[1] = 1 \quad [t] = \varepsilon$

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_\ell t^\ell = a_0 + a_1 t + q(t)$

$q(t) \in I$

$\rightarrow [p(t)] = a_0[1] + a_1[t] = a_0 + a_1\varepsilon$

$[t]^2 = [t^2] = 0$

$$\frac{\mathbb{R}[t]}{t^2\mathbb{R}[t]} = \mathbb{R}[\varepsilon] = \{\alpha + \beta\varepsilon : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad \varepsilon^2 = 0$$

$\rightarrow (\alpha + \beta\varepsilon)(\alpha' + \beta'\varepsilon) = \alpha\alpha' + \alpha\beta'\varepsilon + \alpha'\beta\varepsilon + \beta\beta'\varepsilon^2$

$= \alpha\alpha' + \alpha\beta' + \alpha'\beta\varepsilon$

Números duales.

$$\frac{\mathbb{R}[t]}{t^2\mathbb{R}[t]} = \mathbb{R}[\varepsilon]$$ anillo de los números reales

$$\frac{\mathbb{R}[t]}{(t^2+1)\mathbb{R}[t]} = \mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$$

En $\dfrac{\mathbb{R}[t]}{t^2\mathbb{R}[t]}$ $\quad \varepsilon = [t]$ $\quad$ y se opera

$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (bc + ad)\varepsilon$

En $\dfrac{\mathbb{R}[t]}{(t^2+1)\mathbb{R}[t]}$ $i=[t]$ observar que

$$i^2+1 = [t]^2+[1] = [t^2+1] = 0$$

Operatoria $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$

$$[t^2] = -[1]$$

$$[t^3] = [t^2][t] = -[t]$$

$$[t^4] = \cdots\cdots$$

En definitiva $[p(t)] = a_0 + a_1[t] + a_2(-[1]) + a_3(-[t]) + \cdots$

$[p(t)] = a + b[t]$ y se opera

$$(a+bi)(a'+b'i) = (aa'-bb') + (ab'+a'b)[t].$$

etc.