# Estimacion Parte 2

lunes, 28 de mayo de 2018 23:04

## Distribución de Formas Cuadráticas

Sea $Y \sim N_n(\mu, \Sigma)$ con $\Sigma$ definida positiva
Estamos interesados en la distribución de las variables aleatorias de la forma $Y'AY = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_i Y_j$

Notemos que A puede asumirse simétrica dado que podemos reemplazar $a_{ij}$ con $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ sin cambiar el valor de la forma cuadrática.

Como A es simétrica la podemos diagonalizar con una transformación ortogonal es decir existe una matriz ortogonal T y una matriz diagonal D con

$$T'AT = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Los $d_i$ son los valores propios de A
Supongamos que $Y \sim N_n(0, I_n)$ entonces

$$Y'AY = Y'\underbrace{TDT'}_{A}Y = Z'DZ = \sum_{i=1}^{n} d_i Z_i^2$$

con $Z = T'Y$

Como $Z = T'Y \sim N_n(0, I_n) \Rightarrow Z_i^2 \sim \chi_1^2$

Luego $Y'AY$ es una combinación lineal de variables aleatorias $\chi^2_1$ independientes.

Dados los $d_i$ es posible calcular la distribución al menos numéricamente

Hay un caso especial que nos permite calcular la distribución exacta de la forma cuadrática.

Si $r$ de los valores propios $d_i$ son 1 y los restantes $n-r$ son cero, entonces la distribución de $Y'AY$ es la suma de $r$, $\chi^2_1$ independientes que tiene distribución $\chi^2_r$

Podemos saber cuando estamos en este caso usando el siguiente teorema.

Teorema: Sea $A$ una matriz simétrica. Entonces $A$ tiene $r$ valores propios iguales a 1 y el resto 0 si y solo si $A^2 = A$ y rango$(A) = r$

El recíproco también es cierto, luego se puede establecer que:

Teorema: Sea $Y \sim N_n(0, I_n)$ y sea $A$ una matriz simétrica. Entonces $Y'AY$ tiene distribución $\chi^2_r$ si y solo si $A$ es idempotente de rango $r$

Teorema: Supongamos que $Y \sim N_n(0, \Sigma)$ y $A$ simétrica

Entonces $Y'AY \sim \chi^2_r$ si y solo si $r$ de los valores propios de $A\Sigma$ son 1, el resto son 0.

Dem: Se omite

<u>Corolario</u>: Sea $Y \sim N_n(0, \Sigma)$ donde $\Sigma$ es definida positiva y supongamos que $A$ es simétrica. Entonces $Y'AY \sim \chi^2_r$ si y sólo si $A\Sigma$ es idempotente de rango $r$

<u>Teorema</u>: Supongamos que $Y \sim N_n(\mu, \Sigma)$ donde $\Sigma$ es definida positiva. Entonces

$$Q = (Y-\mu)' \Sigma^{-1} (Y-\mu) \sim \chi^2_n$$

# Estimación con Restricciones

Consideremos el modelo $Y = X\beta + \varepsilon$ con $X$ una matriz $n\times p$ de rango completo. Supongamos queremos estimar $\beta$ por mínimos cuadrados (o sea se minimiza $\varepsilon'\varepsilon$) sujeto a la restricción $A\beta = c$, $A$ $q\times q$ de rango $q$.

Usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Se tienen $q$ restricciones $a'_i\beta = c_i$ $(i=1,2,\dots,q)$ donde $a'_i$ es la $i$-ésima fila de $A$.

Debemos considerar la expresión

$$r = \varepsilon'\varepsilon + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i (a'_i\beta - c_i)$$

Como $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i (a'_i\beta - c_i) = \lambda'(A\beta - c) = (\beta' A' - c')\lambda$

o sea se tiene $r = \varepsilon'\varepsilon + (\beta' A' - c')\lambda$

y además $A\beta = c$ $\quad (**)$

Ya vimos que $\dfrac{\partial \varepsilon'\varepsilon}{\partial\beta} = -2X'Y + 2X'X\beta$

entonces

$$(*) \qquad \frac{\partial r}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta + A'\lambda = 0$$

Notemos las soluciones de este problema $\hat{\beta}_H$, $\hat{\lambda}_H$ entonces de $(*)$

$$\hat{\beta}_H = (X'X)^{-1}X'Y - \frac{1}{2}(X'X)^{-1}A'\hat{\lambda}_H =$$

$$= \hat{\beta} - \frac{1}{2}(X'X)^{-1}A'\hat{\lambda}_H$$

De (**) se tiene que

□ $$c = A\hat{\beta}_H = A\hat{\beta} - \frac{1}{2}A(X'X)^{-1}A'\lambda_H$$

Como $(X'X)^{-1}$ es definida positiva y $A$ es $q \times f$ de rango $q$ $\Rightarrow$ $A(X'X)^{-1}A'$ es def positiva y por lo tanto no singular, luego:

$$-\frac{1}{2}\lambda_H = \left(A(X'X)^{-1}A'\right)^{-1}(c - A\hat{\beta})$$

entonces:

$$\hat{\beta}_H = \hat{\beta} + (X'X)^{-1}A'\left(A(X'X)^{-1}A'\right)^{-1}(c - A\hat{\beta})$$