Clase 18

viernes, 26 de octubre de 2018 13:09

Error Cuadrático Medio Integrado

Mantendremos la sigla en inglés MISE

$$MISE(f_n) = \int ECM(f_n(x))\, dx$$

Recordemos que:

$$ECM(f_n(x)) = (nh)^{-1} \|K\|_2^2 f(x) + \frac{h^4}{4}(\mu_2(K) f''(x))^2 + o((nh)^{-1}) + o(h^4)$$

luego

$$MISE(f_n) = (nh)^{-1} \|K\|_2^2 \overbrace{\int f(x)\, dx}^{=1} + \frac{h^4}{4}(\mu_2(K))^2 \int f''(x)\, dx + o((nh)^{-1}) + o(h^4)$$

luego el MISE asintótico es:

$$A\text{-}MISE = (nh)^{-1} \|K\|_2^2 + \frac{h^4}{4} (\mu_2(K))^2 \int f''(x)\, dx$$

Dejamos como ejercicio verificar que el ancho de ventana óptimo para el A-MISE es

$$h_0 = \left(\frac{\|K\|_2^2}{\|f''\|_2^2 (\mu_2(K))^2 n} \right)^{1/5}$$

y que

$$\text{A-MISE}\left(\hat{f}_{n,h_0}\right) = \frac{5}{4}\left(\|K\|_2^2\right)^{4/5}\left(\mu_2(K)\|f''\|_2\right)^{2/5} n^{-4/5}$$

Distribución Asintótica

Si analizamos el estimador f_n vemos que es un promedio de variables aleatorias por lo que se puede esperar que adecuadamente normalizados converja a una distribución normal

$$f_n(x) = \frac{1}{nh}\sum_{k=1}^{n} K\left(\frac{x-X_k}{h}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} K_h(x-X_k)$$

O sea tenemos un sistema triangular por filas
Usaremos las condiciones de Liapunov que implican las de Lindeberg

Una condición suficiente para que

$$\frac{f_n(x) - E(f_n(x))}{\sigma(f_n(x))} \xrightarrow{w} Z \sim N(0,1)$$

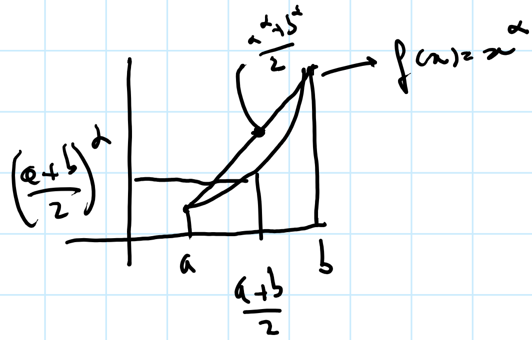
es que

$$\frac{E\left(|K_h(x-X_1) - E(K_h(x-X_1))|^{2+\delta}\right)}{n^{\delta/2}\,\sigma\left(K_h(x-X_1)\right)^{2+\delta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

para algún $\delta > 0$

Pondremos las hipótesis a medida que las necesitemos

Primero veamos que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha} \le \frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{2}$.



Consideremos $f(x)=|x|^{\alpha}$ $\alpha \ge 1$ es convexa, en particular si elegimos x, y entonces se cumple que

$$f(tx+(1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y) \quad 0 \le t \le 1$$

Sean entonces $\alpha = 2+\delta$ y consideremos dos puntos $a, b \ge 0$ y $t = 1/2$

Obtenemos $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2+\delta} \le \frac{a^{2+\delta}+b^{2+\delta}}{2}$$

Entonces:

$$E\left(\left|K_h(x-X_1) - E(K_h(x-X_1))\right|^{2+\delta}\right) \le$$

$$\le E\left(\left(|K_h(x-X_1)| + |E(K_h(x-X_1))|\right)^{2+\delta}\right) \le$$

$$\le E\left(\underbrace{\frac{2^{2+\delta}}{2}}_{=2^{1+\delta}}\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta} + |E(K_h(x-X_1))|^{2+\delta}\right)\right) = \circledast$$

Recordemos ahora la desigualdad de Jensen:

Si μ es una medida positiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en un conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$

Si f es una función real en $L^1(\mu)$ y φ convexa

entonces $$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)\,d\mu \quad \left[\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))\right]$$

Entonces consideremos $\varphi(x) = |x|^{2+\delta}$

entonces $$|E(|K_h(x-X_1)|)|^{2+\delta} \leq E\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta}\right)$$

Así pues.

$$(*) = E\left(2^{1+\delta}\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta} + |E(K_h(x-X_1))|^{2+\delta}\right)\right) \leq$$

$$\leq E\left(2^{1+\delta}\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta} + E\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta}\right)\right)\right) =$$

$$= 2^{1+\delta}\left(E\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta}\right) + E\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta}\right)\right)$$

$$= 2^{2+\delta} E\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta}\right)$$

Obtuvimos que:

$$E\left(|K_h(x-X_1) - E(K_h(x-X_1))|^{2+\delta}\right) \leq 2^{2+\delta} E\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta}\right)$$

Veamos como queda $\sigma(K_h(x-X_1))$

Ya vimos que $\operatorname{Var}(f_n(x)) = \frac{1}{nh}\|K\|_2^2 f(x) + o(1/nh)$ $\quad \begin{matrix} nh \to \infty \\ h \to 0 \end{matrix}$

Como $\operatorname{Var}(f_n(x)) = \frac{1}{nh^2}\operatorname{Var}\left(K\left(\frac{x-X_1}{h}\right)\right) = \frac{1}{n}\operatorname{Var}\left(K_h(x-X_1)\right)$ luego

$$h.\operatorname{Var}(K_h(x-X_1)) = nh\operatorname{Var}(f_n(x)) = \underbrace{\|K\|_2^2}_{=\int K^2(t)dt} f(x) + nh\, o(1/nh)$$

luego $h\operatorname{Var}(K_h(x-X_1)) \xrightarrow[\substack{nh\to\infty \\ h\to 0}]{} f(x)\int K^2(t)dt$

Además vimos que $f_n(x)$ es asintóticamente insesgado si $h\to 0$ y $\int K(t)\,dt = 1$. De esto obtenemos que

$$E(K_h(x-X_1)) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x) \quad \text{pues}$$

$$E(f_n(x)) = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} E\Big(\overbrace{\frac{1}{h}K\left(\frac{x-X_1}{h}\right)}^{K_h(x-X_i)}\Big) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$

A partir de lo anterior

$$\frac{E\left(|K_h(x-X_1) - E(K_h(x-X_1))|^{2+\delta}\right)}{n^{\delta/2}\,\sigma(K_h(x-X_1))^{2+\delta}} \leq 2^{2+\delta}\frac{E\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta}\right)}{n^{\delta/2}\,\sigma(K_h(x-X_1))^{2+\delta}} =$$

$$= \frac{2^{2+\delta}}{h^{1+\delta}} \frac{h^{1+\delta}E\left(|K_h(x-X_1)|^{2+\delta}\right)}{n^{\delta/2}\,\frac{h^{1+\delta/2}\sigma(K_h(x-X_1))^{2+\delta}}{h^{1+\delta/2}}}$$

$\to f(x)\int K^{2+\delta}(t)\,dt$

ver

$\to f(x)^{1+\delta/2}\left(\int K^2(t)\,dt\right)^{1+\delta/2}$

Veamos que (**) $E\left(\left|K_h(x-X_1)^{2+\delta}\right|\right) = \dfrac{1}{h^{2+\delta}} E\left(K^{2+\delta}\left(\dfrac{x-X_1}{h}\right)\right) =$

$$= \frac{1}{h^{1+\delta}} \frac{1}{h} \int K^{2+\delta}\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t)\, dt$$

Si se cumplen las hipótesis de Bochner (para $K^{2+\delta}$) tenemos que

$$\frac{1}{h}\int K^{2+\delta}\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t)\, dt \to f(x)\int K^{2+\delta}(t)\, dt$$

entonces

$$h^{1+\delta} E\left(\left|K_h\left(\frac{x-X_1}{h}\right)\right|^{2+\delta}\right) \to f(x)\int K^{2+\delta}(t)\, dt$$

(***) Como $h\, \overbrace{\mathrm{Var}\left(K_h(x-X_1)\right)}^{\sigma^2(K_h(x-X_1))} \to f(x)\int K^2(t)\, dt$

$$\Rightarrow h^{\delta/2}\, \sigma\left(K_h(x-X_1)\right)^{\delta} \to \left(f(x)\int K^2(t)\, dt\right)^{\delta/2}$$

luego $h\, \sigma^2\left(K_h(x-X_1)\right) h^{\delta/2} \sigma\left(K_h(x-X_1)\right)^{\delta} =$

$$= h^{1+\delta/2}\left(\sigma\left(K_h(x-X_1)\right)\right)^{2+\delta} \to f(x)^{1+\delta/2}\left(\int K^2(t)\, dt\right)^{1+\delta/2}$$

Sea $C = \dfrac{2^{2+\delta} f(x)\int K^{2+\delta}(t)\, dt}{f(x)^{1+\delta/2}\left(\int K^2(t)\, dt\right)^{1+\delta/2}}$ entonces

$$\frac{E\left(\left|K_h(x-X_1) - E(K_h(x-X_1))\right|^{2+\delta}\right)}{n^{\delta/2}\, \sigma\left(K_h(x-X_1)\right)^{2+\delta}} \to \frac{C\, h^{1+\delta/2}}{n^{\delta/2}\, h^{1+\delta}} = \frac{C}{(nh)^{\delta/2}} \xrightarrow[nh\to\infty]{} 0$$

así pues se cumple la condición de Liapunov

y $$\frac{f_n(x) - E(f_n(x))}{\sigma(f_n(x))} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

Hemos probado el Lema

Lema 95. Bajo las condiciones que hemos impuesto se cumple que

$$\frac{f_n(x) - E(f_n(x))}{\sigma(f_n(x))} \to N(0,1)$$

observemos que nosotros deseamos poner $f(x)$ en vez de $E(f_n(x))$. El siguiente teorema nos permite esto

Teorema 96: Supongamos que se cumple

1) K ~~acotada~~, $K(t) \geq 0 \ \forall t$
2) $\int K(u)\,du = 1$
3) K simétrica
4) $u^2 K(u)$ acotada
5) f es lipchitz en un entorno de x
6) $nh \to \infty$, $nh^3 \to 0$

entonces:

a) $\mathrm{Var}\left(\sqrt{nh}\, f_n(x)\right) \to f(x) \int K^2(u)\,du$

b) $\sqrt{nh}\left(\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} E\left(K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right) - f(x)\right) \to 0$

c) $\sqrt{nh}\left(f_n(x) - f(x)\right) \to N\left(0, f(x) \int K^2(u)\,du\right)$

Dem:

a) K acotado, $\int K(u)\,du = 1$ entonces $\int K^2(u)\,du < \infty$

Sabemos que $|u K(u)| \xrightarrow[|u| \to \infty]{} 0$ pues $\underbrace{u^2 K(u)}_{u \, uK(u) \to 0, \ |u| \to \infty}$ es acotado

luego se cumplen las hipótesis de Bochner así que se cumple a)

b) $\exists\, \delta > 0$ tal que $|f(x+s) - f(x)| \leq c|s|$ si $|s| < \delta$

$$\left| \sqrt{nh} \left(\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} E\left(K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right) - f(x) \right| =$$

CV $\frac{x-t}{h} = -u$

$$= \left| \sqrt{nh} \left(\int \frac{1}{h} K\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t)\, dt - f(x) \int K(t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \sqrt{nh} \int K(u) \left(f(x+uh) - f(x) \right) du \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{nh} \left[\underbrace{hc \int_{|hu| < \delta} |u K(u)|\, du}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{|u| \geq \delta/h} |K(u)| f(x+uh)\, du}_{\mathrm{II}} + f(x) \underbrace{\int_{|u| \geq \delta/h} |K(u)|\, du}_{\mathrm{III}} = (A) \right.$$

Sea $C_1 = \| u^2 K(u) \|_\infty$

(I) Sabemos que $|u K(u)|$ está acotado luego

$\int_{|hu| < \delta} |u K(u)|\, du$ está acotado digamos por C_2

(II) $$\int_{|u| \geq \delta/h} |K(u)| f(x+uh)\, du = \int_{|u| \geq \delta/h} \frac{|u^2 K(u)|}{|u^2|} f(x+uh)\, du \leq$$

$$\leq \frac{h^2}{\delta^2} C_1 \int_{|u| \geq \delta/h} f(x+uh)\, du \overset{\text{CV } t = x+uh}{=} \frac{h^2}{\delta^2} C_1 \int \frac{f(t)}{h}\, dt =$$

$$= \frac{h C_1}{\delta^2} \underbrace{\int f(t)\, dt}_{=1}$$

(III) $$\int_{|u| \geq \delta/h} |K(u)|\, du = \int_{|u| \geq \delta/h} \frac{|u^2 K(u)|}{|u^2|}\, du \leq C_1 \int_{|u| \geq \delta/h} \frac{du}{u^2} =$$

$$\overset{\text{CV } t = uh}{=} C_1 h \int \frac{dt}{}$$

$$\leq C_1 h \int_{|t|>\delta} \frac{dt}{t^2}$$

luego

$$A \leq \sqrt{nh}\left[h c\, C_2 + h \frac{C_1}{\delta^2} + C_1 h \underbrace{\int_{|t|>\delta} \frac{dt}{t^2}}_{\text{acotada por } C_4}\right] =$$

$$= \sqrt{nh^3}\left[c\, C_2 + \frac{C_1}{\delta^2} + C_1 C_4\right] \longrightarrow 0 \quad \text{si } nh^3 \to 0$$

c) $\sqrt{nh}\left(f_n(x) - f(x)\right) = \sqrt{nh}\left(f_n(x) - E(f_n(x))\right) + \sqrt{nh}\left[\overbrace{E(f_n(x)) - f(x)}^{\to 0}\right]$

y $\sigma(f_n(x)) \underbrace{\left(\frac{\left(f_n(x) - E(f_n(x))\right)}{\sigma(f_n(x))}\right)}_{N(0,1) \text{ por Lema 95}} \sqrt{nh}$

Pero $nh\, \sigma^2(f_n(x)) \longrightarrow f(x) \int K^2(u)\,du$ entonces

$$(nh)^{1/2} \sigma(f_n(x)) \longrightarrow \left(f(x)\int K^2(u)\,du\right)^{1/2}$$

así pues $\sqrt{nh}\left(f_n(x) - f(x)\right) \longrightarrow N\left(0, f(x)\int K^2(u)\,du\right)$