Clase 16

viernes, 19 de octubre de 2018 15:42

Veamos ahora el sesgo del estimador.
Para esto deberemos considerar hipótesis adicionales
Consideremos que la densidad f tiene 3 derivadas continuas

Sabemos que el sesgo al cuadrado es

$$\underbrace{B}_{\text{sesgo = bias}}{}^2(f_n(x)) = (E(f_n(x)) - f(x))^2$$

Si f tiene 3 derivadas continuas

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + f''(x)\frac{(t-x)^2}{2} + \overbrace{f'''(\xi)\frac{(t-x)^3}{6}}^{o((t-x)^2)}$$

Ahora

$$E(f_n(x)) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = f(x)\frac{\cancel{2h}}{\cancel{2h}} + \frac{f'(x)}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(t-x)\,dt +$$

$$+ \frac{f''(x)}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\frac{(t-x)^2}{2}\,dt + \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} o((t-x)^2)\,dt$$

Como

$$\int_{x-h}^{x+h}(t-x)^2\,dt = \int_{-h}^{h} u^2\,du = \frac{2h^3}{3}$$

$x-h \qquad -h \qquad 3$

$$\int_{x-h}^{x+h} (t-x)\,dt = \int_{-h}^{h} u\,du = 0$$

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} o\left((t-x)^2\right)dt = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} o(u^2)\,du = o(h^2)$$

Obtenemos

$$E(f_n(x)) = f(x) + \frac{f''(x)}{2h}\frac{\cancel{2}h^3}{\cancel{2}3} + o(h^2) \quad \text{o sea}$$

$$E(f_n(x)) = f(x) + \frac{f''(x)\,h^2}{6} + o(h^2)$$

luego

$$B^2(f_n(x)) = \left(f''(x)\frac{h^2}{6} + o(h^2)\right)^2 = \left(f''(x)\right)^2\frac{h^4}{36} + o(h^4)$$

luego recordando que $ECM(f_n(x)) = B^2(f_n(x)) + Var(f_n(x))$

Recordamos que:

$$Var(f_n(x)) = \frac{1}{4nh^2} Var\left(I_{(x-h,\,x+h)}(X_1)\right) =$$

$$= \frac{1}{4nh^2}\left(\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt\right)\left(1-\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt\right) =$$

$x+h \qquad f(x) \quad h\to 0 \qquad x+h$

Ahora $\overbrace{\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt}^{\xrightarrow[h\to 0]{} f(x)} = O(1)$ luego $\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = O(h)$

luego

$$Var(f_n(x)) = \frac{1}{2nh}\left(1 - O(h)\right)\overbrace{\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt}^{\xrightarrow[h\to 0]{} f(x)} =$$

$$= \frac{1}{2nh}\left(f(x) + o(1)\right) = \frac{f(x)}{2nh} + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

Entonces

$$ECM(f_n(x)) = \frac{(f''(x))^2 h^4}{36} + \frac{f(x)}{2nh} + o\left(h^4 + \frac{1}{nh}\right)$$

Esto refleja el compromiso entre las componentes si $nh \to \infty$ se reduce la varianza si $h \to 0$ se reduce el sesgo

Si desechamos el término $o\left(h^4 + \frac{1}{nh}\right)$ obtenemos el ECM asintótico ECMA

$$\frac{\partial ECMA}{\partial h} = \frac{(f''(x))^2\, 4h^3}{36} - \frac{f(x)}{2nh^2} = 0$$

$$\frac{(f''(x))^2 h^3}{9} = \frac{f(x)}{2nh^2}$$

$$h^5 = \frac{9 f(x)}{2(f''(x))^2} \cdot \frac{1}{n}$$

o sea $h = C\, n^{-1/5}$ con $C = \left[9 f(x) \right]^{1/5}$

o sea $h = C\, n^{-1/5}$ con $C = \left[\dfrac{9 f(x)}{2(f''(x))^2}\right]^{1/5}$

El ECM es del orden $n^{-4/5}$

Vimos que al sesgo le conviene que la ventana sea muy chica y a la varianza que sea grande
Los estimadores son violentamente sensibles al h (luego veremos que no al K)

Lema 86 : (Bochner) Sea K acotada y se cumple

a) $\int |K(u)|\, du < \infty$

b) $\lim_{|x|\to\infty} |x K(x)| = 0$

c) K simétrica

Sea g tal que $\int |g(t)|\, dt < \infty$

Definamos $g_h = \frac{1}{h} \int K\left(\frac{x-t}{h}\right) g(t)\, dt = K_h * g\,(x)$

con $K_h(t) = \frac{1}{h} K(t/h)$

entonces $g_h(x) \longrightarrow g(x) \int K(t)\, dt$ si $h \to 0$

para todo punto x de continuidad de g

Obs: Observemos que la condición b) no es muy restrictiva pues pr y las funciones de soporte compacto lo cumplen

Obs: Si pensamos $\frac{1}{h} K(t/h)$ como una medida esto se parece a la masa puntual en x. o sea estamos convolucionando g con algo parecido a la masa puntual

Obs si $\int K(x)\,dx = 1$ el lema dice

$$g_h(x) \xrightarrow[h\to 0]{} g(x) \text{ en } x \text{ de continuidad de } g$$

Obs: A las funciones K se les llama núcleos

Dem: Como x es un punto de continuidad de g se puede encontrar un entorno tal que
$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x - y| < \delta$$

Consideremos

$$\left| g_h(x) - g(x) \int K(t)\,dt \right| = \left| \frac{1}{h} \int K\left(\frac{x-t}{h}\right) g(t)\,dt - g(x) \int K(t)\,dt \right|$$

sea $\quad u = \dfrac{t-x}{h}$

$K(u) = K(-u)$ pues K es simétrica

$$= \left| \int K(-u)\, g(x+uh)\, du - g(x) \int K(u)\, du \right| \le$$

$$\le \int |K(u)|\, |g(x+uh) - g(x)|\, du \le$$

$$\le \varepsilon \int_{|u|<\delta/h} |K(u)|\, du + \int_{|u|\ge \delta/h} |K(u)|\, |g(x+uh) - g(x)|\, du \le$$

Como $\int |K|$ es acotado $\int_{|u|<\delta/h} |K(u)|\, du < M$ y tomando $\varepsilon' = \varepsilon M$

$$\le \varepsilon' + \int_{|u|\ge\delta/h} |K(u)|\, |g(x)|\, du + \int_{|u|\ge\delta/h} |K(u)|\, |g(x+uh)|\, du \quad (1)$$

$< \varepsilon^*$ pues es la cola de una integral convergente

$$\int_{|u|\ge\delta/h} |K(u)|\, |g(x)|\, du = |g(x)| \int_{|u|\ge\delta/h} |K(u)|\, du < \varepsilon''$$

También

$$\int_{|u|>\delta/h} |K(u)|\, |g(x+uh)|\, du = \int_{|u|>\delta/h} \left|\frac{uK(u)}{u}\right| |g(x+uh)|\, du \le$$

$|uK(u)| < \varepsilon^{**}$ por hipótesis

$$\le \frac{h}{\delta} \int_{|u|>\delta/h} |uK(u)|\, |g(x+uh)|\, du \le$$

$$\le \frac{h}{\delta}\, \varepsilon^{**} \int_{|u|>\delta/h} |g(x+uh)|\, du \le \frac{\cancel{h}}{\delta}\, \varepsilon^{**} \int |g(t)|\, \frac{dt}{\cancel{h}} < \varepsilon'''$$

cv $x+uh = t$

luego $(1) < \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon'''$ de donde

$$g_h(x) \xrightarrow[h\to 0]{} g(x) \int K(t)\,dt$$

en x punto de continuidad de g

Lema 87: (Lema Bochner extendido)

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y K una función tal que

a) $K \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$

b) $\int K(t)\,dt = 1$

c) $K(x) = o(|x|^{-d})$ si $|x| \to +\infty$

Consideremos $K_h(t) = \frac{1}{h^d} K\left(\frac{t}{h}\right)$

entonces si $f_h = f * K_h$ se cumple que

$$f_h(x) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x) \text{ en cada punto } x \text{ de continuidad de } f$$

<u>Dem:</u> Sea x un punto de continuidad de f, entonces

dado $\eta > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que $|f(x-t) - f(x)| < \eta$ si $|t| < \delta$

Primero veamos que $\int K_h(t) = 1$ pues

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_h(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h^d} K\left(\frac{t}{h}\right) dt \underset{\text{si } u = \frac{t}{h}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} K(u)\,du = 1$$

$$|f_h(x) - f(x)| = \left| \int f(x-t) K_h(t)\,dt - f(x) \int K_h(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int (f(x-t) - f(x)) K_h(t)\,dt \right| \leq \eta \int_{|t|<\delta} |K_h(t)|\,dt + \int_{|t|\geq\delta} |f(x-t) - f(x)|\,|K_h(t)|\,dt$$

$$\leq \eta \|K\|_1 + \underbrace{\int_{|t|\geq\delta} |f(x-t)|\,|K_h(t)|\,dt}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{|t|\geq\delta} |f(x)|\,|K_h(t)|\,dt}_{\text{II}}$$

$$\text{II} = |f(x)| \int_{|t|\geq\delta} |K_h(t)|\,dt < |f(x)|\,\varepsilon$$ si $h \to 0$ pues es la cola de una integral convergente

$$\text{I} = \int_{|t|\geq\delta} |f(x-t)|\,|K_h(t)|\,dt$$

Defino ψ por la siguiente relación $|K(x)| = \frac{\psi(x)}{|x|^d}$ luego

$$\psi(x) = \frac{|K(x)|}{|} \longrightarrow 0 \quad \text{si } |x| \to +\infty$$

$$\eta(x) = \frac{|K(x)|}{|x|^{-d}} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad |x| \to +\infty$$

$$K_h(t) = \frac{1}{h^d} K\left(t/h\right) = \frac{1}{\cancel{h^d}} \frac{\eta\left(t/h\right)}{\left|t/h\right|^d} = \frac{\eta\left(t/h\right)}{|t|^d}$$

entonces:

$$\mathrm{I} = \int_{|t| \geq \delta} |f(x-t)| \frac{\eta\left(t/h\right)}{|t|^d} \, dt \leq \frac{1}{\delta^d} \left\{ \sup_{|t| \geq \delta} \eta\left(t/h\right) \right\} \int_{|t| \geq \delta} |f(x-t)| \, dt$$

Pero $\sup\limits_{|t| \geq \delta} \eta\left(t/h\right) \longrightarrow 0$ si $h \to 0$ pues $|t|/h \longrightarrow +\infty$

Además $\int_{|t| \geq \delta} |f(x-t)| \, dt \leq \|f\|_1$

Luego se tiene

$$|f_h(x) - f(x)| \leq \eta \|K\|_1 + \varepsilon |f(x)| + \frac{1}{\delta^d} \varepsilon'' \|f\|_1$$

o sea $\quad |f_h(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ si $h \to 0$