Test paramétricos.

Test sobre la media

Comenzaremos viendo test para la comprobación de hipótesis sobre la media cuando la variable tiene distribución normal.

Supongamos que $\boxed{X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)}$

Discutiremos dos casos
1) suponiendo σ conocido
2) suponiendo σ desconocido

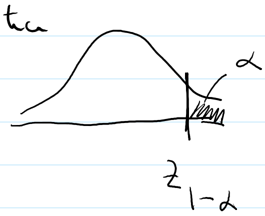
Caso 1 En este caso se supone que σ es conocido

a) En primera instancia analizaremos tres posibles test

$H_0: \mu=\mu_0$	$H_0: \mu=\mu_0$	$H_0: \mu\leq\mu_0$
$H_1: \mu=\mu_1$	$H_1: \mu>\mu_0$	$H_1: \mu>\mu_0$
$(\mu_1>\mu_0)$		

El estadístico a utilizar es $Z=\dfrac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}$

En este caso $Z\sim N(0,1)$ de donde la región crítica para un nivel α es

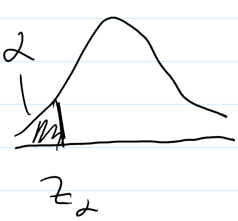


$$RC=\left\{Z\geq z_{1-\alpha}\right\}=\left\{\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}\geq z_{1-\alpha}\right\}$$

b) Ahora si los test son

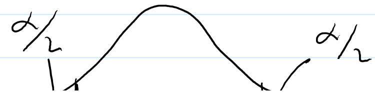
$H_0: \mu=\mu_0$	$H_0: \mu=\mu_0$	$H_0: \mu\geq\mu_0$
$H_1: \mu=\mu_1$	$H_1: \mu<\mu_0$	$H_1: \mu<\mu_0$
$(\mu_1<\mu_0)$		

$$Z=\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}\sim N(0,1)$$



$$RC=\left\{Z\leq z_\alpha\right\}=\left\{\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}\leq z_\alpha\right\}$$

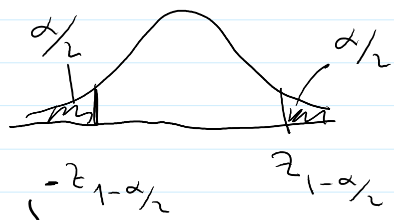
c) Si $H_0: \mu=\mu_0$
$H_1: \mu\neq\mu_0$



$Z=\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)\ \sim N(0,1)$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1)$$



$$RC = \{|Z| \geq z_{1-\alpha/2}\} = \left\{ \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}\right| \geq z_{1-\alpha/2} \right\}$$

Caso 2 Ahora supongamos que σ es desconocido. Lo natural es reemplazar σ por S obteniéndose:

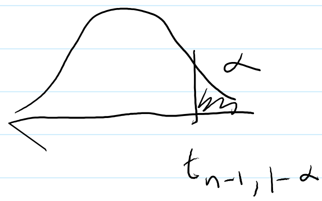
a) $H_0: \mu = \mu_0$ $\quad$ $H_0: \mu = \mu_0$ $\quad$ $H_0: \mu \leq \mu_0$

$H_1: \mu = \mu_1$ $\quad$ $H_1: \mu > \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu > \mu_0$

$(\mu_1 > \mu_0)$

El estadístico a usar es

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$$



Luego la región crítica es

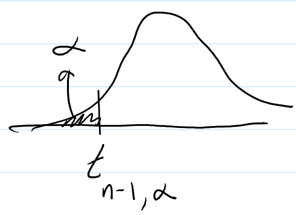
$$RC = \{T \geq t_{n-1,1-\alpha}\} = \left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \geq t_{n-1,1-\alpha} \right\}$$

b) $H_0: \mu = \mu_0$ $\quad$ $H_0: \mu = \mu_0$ $\quad$ $H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu = \mu_1$ $\quad$ $H_1: \mu < \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu < \mu_0$

$(\mu_1 < \mu_0)$

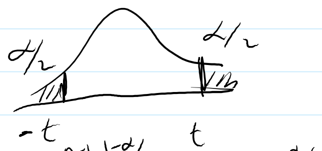
$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$$



$$RC = \{T \leq t_{n-1,\alpha}\} = \left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \leq t_{n-1,\alpha} \right\}$$

c) $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$



$$RC = \{|T| \geq t_{n-1,1-\alpha/2}\} = \left\{ \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S}\right| \geq t_{n-1,1-\alpha/2} \right\}$$

Test para la desviación estandar

a) $H_0: \sigma = \sigma_0$ $\quad$ $H_0: \sigma = \sigma_0$ $\quad$ $H_0: \sigma \leq \sigma_0$

$H_1: \sigma = \sigma_1$ $\quad$ $H_1: \sigma > \sigma_0$ $\quad$ $H_1: \sigma > \sigma_0$

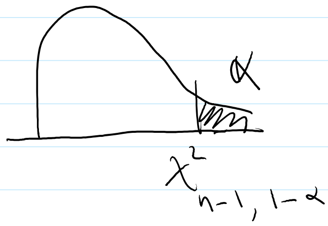
$(\sigma_1 > \sigma_0)$

$(\sigma_1 > \sigma_0)$

El estadístico es $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

La región crítica queda

$$RC = \left\{ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1,1-\alpha} \right\}$$

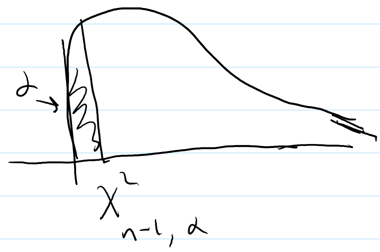


b) $H_0: \sigma = \sigma_0$ $\quad H_0: \sigma = \sigma_0$ $\quad H_0: \sigma \geq \sigma_0$

$H_1: \sigma = \sigma_1$ $\quad H_1: \sigma < \sigma_0$ $\quad H_1: \sigma < \sigma_0$

$(\sigma_1 < \sigma_0)$

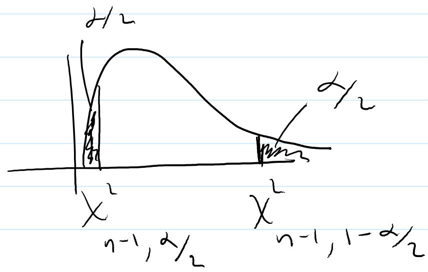
$$RC = \left\{ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1,\alpha} \right\}$$



c) $H_0: \sigma = \sigma_0$

$H_1: \sigma \neq \sigma_0$

$$RC = \left\{ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \notin \left(\chi^2_{n-1,\alpha/2}, \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \right) \right\}$$



Test sobre la media basados en el TCL

En el caso que la muestra no provenga de una distribución normal pero se cumpla

$X_1, \ldots, X_n \sim F$, $\quad E(X_1) = \mu < \infty$, $\quad Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$

y n grande entonces obtenemos para

H_0) $\mu = \mu_0$ $\quad H_0: \mu = \mu_0$ $\quad H_0: \mu \leq \mu_0$

$H_1: \mu = \mu_1$ $\quad H_1: \mu > \mu_0$ $\quad H_1: \mu > \mu_0$

$\mu_1 > \mu_0$

$$RC = \left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s} \geq z_{1-\alpha} \right\} \text{ ya que}$$

por el T.C.L $\quad \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s} \sim N(0,1)$

En el caso

$H_0: \mu = \mu_0$ $\quad H_0: \mu = \mu_0$ $\quad H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu = \mu_1$ $\quad H_1: \mu < \mu_0$ $\quad H_1: \mu < \mu_0$

$(\mu_1 < \mu_0)$

$$RC = \left\{ \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu_0)}{S} \leq z_\alpha \right\}$$

y para $\quad H_0: \mu = \mu_0$

$\qquad\qquad H_1: \mu \neq \mu_0$

$$RC = \left\{ \left| \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu_0)}{S} \right| \geq z_{1-\alpha/2} \right\}$$

En el caso de media y varianza ligadas o sea $\sigma = \sigma(\mu)$ se puede reemplazar S por $\sigma(\bar{X})$

También se puede usar el estadístico

$$\sqrt{n}\,(g(\bar{X}) - g(\mu_0)) \quad \text{con} \quad g(x) = \int_{\mu_0}^{x} \frac{1}{\sigma(t)}\,dt$$

y $\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(\mu_0)) \sim N(0,1) \quad (n \to \infty)$ Las RC se arman en base a esto igual que en el caso normal

Test para proporciones

Supongamos $X_1, \dots, X_n \sim Ber(p) \quad$ (n grande)

Queremos decidir sobre $\quad H_0: p \leq p_0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad H_1: p > p_0$

Usando lo anterior podemos obtener dos regiones críticas

Como $\bar{X} = \hat{p}$ se tiene

a) $$RC = \left\{ \frac{\sqrt{n}\,(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})}} \geq z_{1-\alpha} \right\}$$

b) $$RC = \left\{ 2\sqrt{n}\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{\hat{p}} - \operatorname{arcsen}\sqrt{p_0}\right) \geq z_{1-\alpha} \right\}$$

Los cambios a realizar en la RC para los otros casos de hipótesis son obvios.

También puede usarse $Z = \dfrac{\sqrt{n}\,(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0\,(1-p_0)}} \sim N(0,1)$

Comparación de dos medias para poblaciones independientes

Caso 1

Supongamos que $X_1, \dots, X_m \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$

Supongamos que $X_1, \dots, X_m \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$
$Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

con X e Y independientes

Comencemos viendo un test de comparación de varianzas

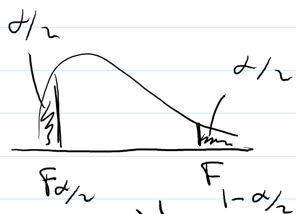
Usaremos como estadístico $F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2}$ con

$$S_x^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1} (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1} (Y_i - \bar{Y})^2$$

en este caso $F \sim F_{(m-1,\, n-1)}$

luego si



$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$
$H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

$$RC = \{ F \notin (F_{\alpha/2}(m-1, n-1) \,,\, F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)) \}$$

$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$
$H_1: \sigma_x^2 < \sigma_y^2$

$$RC = \{ F \leq F_{\alpha}(m-1, n-1) \}$$

$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$
$H_1: \sigma_x^2 > \sigma_y^2$

$$RC = \{ F \geq F_{1-\alpha}(m-1, n-1) \}$$

Para los test de comparación de las medias μ_x y μ_y veremos tres casos

1) σ_x^2, σ_y^2 conocidas
2) σ_x^2, σ_y^2 desconocidas con $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$
3) σ_x^2, σ_y^2 desconocidas con $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

1) σ_x^2 y σ_y^2 conocidas

el estadístico a utilizar es

$$Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{m}+\frac{\sigma_y^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

Las regiones críticas son

$H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ $\Rightarrow$ $RC = \{ |Z| \geq Z_{1-\alpha/2} \}$

$H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x < \mu_y$ $\Rightarrow$ $RC = \{ Z \leq Z_\alpha \}$

$H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x > \mu_y$ $\Rightarrow$ $RC = \{ Z \geq Z_{1-\alpha} \}$

2) σ_x^2 y σ_y^2 desconocidas y $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

El estadístico a usar es

$$T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})\sqrt{\frac{mn}{m+n}}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{(m+n-2)}}} \sim t_{m+n-2}$$

Si $H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ $\Rightarrow$ $RC = \{ |T| \geq t_{m+n-2,\, 1-\alpha/2} \}$

$H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x < \mu_y$ $\Rightarrow$ $RC = \{ T \leq t_{m+n-2,\, \alpha} \}$

$H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x > \mu_y$ $\Rightarrow$ $RC = \{ T \geq t_{m+n-2,\, 1-\alpha} \}$

3) σ_x^2 y σ_y^2 desconocidas y $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

El estadístico es

$$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\quad} \sim t_{N-2} \quad \text{con}$$

$$\sqrt{\frac{S_X^2}{m}+\frac{S_Y^2}{n}}$$

$$N = \left[\frac{(n+1)(m+1)\left(\frac{S_X^2}{m}+\frac{S_Y^2}{n}\right)^2}{(m+1)\left(\frac{S_X^2}{m}\right)^2+(n+1)\left(\frac{S_Y^2}{n}\right)^2} \right]$$ donde $[x]$ es la parte entera de x

Si $\begin{array}{l} H_0: \mu_X = \mu_Y \\ H_1: \mu_X \neq \mu_Y \end{array} \Rightarrow RC = \{ |T| \geq t_{N-2, 1-\alpha/2} \}$

$\begin{array}{l} H_0: \mu_X = \mu_Y \\ H_1: \mu_X < \mu_Y \end{array} \Rightarrow RC = \{ T \leq t_{N-2, \alpha} \}$

$\begin{array}{l} H_0: \mu_X = \mu_Y \\ H_1: \mu_X > \mu_Y \end{array} \Rightarrow RC = \{ T \geq t_{N-2, 1-\alpha} \}$

Veamos ahora el caso donde las distribuciones no son normales

Supongamos

$X_1, X_2, \dots, X_m$ iid $\sim F_X$, $E(X_1) = \mu_X$, $Var(X_1) = \sigma_X^2$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ iid $\sim F_Y$, $E(Y_1) = \mu_Y$, $Var(Y_1) = \sigma_Y^2$

X e Y independientes (m y n grandes)

El estadístico a usar es $$Z = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m}+\frac{S_Y^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

de donde las R.C quedan

$\begin{array}{l} H_0: \mu_X = \mu_Y \\ H_1: \mu_X \neq \mu_Y \end{array} \Rightarrow RC = \{ |Z| \geq z_{1-\alpha/2} \}$

$\begin{array}{l} H_0: \mu_X = \mu_Y \\ H_1: \mu_X < \mu_Y \end{array} \Rightarrow RC = \{ Z \leq z_{\alpha} \}$

$\begin{array}{l} H_0: \mu_X = \mu_Y \\ H_1: \mu_X > \mu_Y \end{array} \Rightarrow RC = \{ Z \geq z_{1-\alpha} \}$

Si la media y la varianza están ligadas, X e Y independientes con el mismo tipo de distribución y m, n grandes podemos encontrar que

a) Si $Var(X_1) = \sigma(\mu_X)$, $Var(Y_1) = \sigma(\mu_Y)$ y podemos reemplazar en el estadístico Z, s_X^2 por $\sigma^2(\bar{X})$ y s_Y^2 por $\sigma^2(\bar{Y})$ obteniendo

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2(\bar{X})}{m} + \frac{\sigma^2(\bar{Y})}{n}}}$$

b) Si $g(x) = \int_{\mu_0}^{x} \frac{1}{\sigma(t)}\, dt$ usar

$$Z = \sqrt{\frac{mn}{m+n}}\left(g(\bar{X}) - g(\bar{Y})\right)$$

Las regiones críticas quedan igual que en el caso anterior.

<u>Test para diferencia de proporciones</u>

$X_1, \dots, X_n$ iid $\sim Ber(p_X)$

$Y_1, \dots, Y_m$ iid $\sim Ber(p_Y)$

X, Y independientes

Tenemos como $\bar{X} = \hat{p}_X$ y $\bar{Y} = \hat{p}_Y$ los dos posibles casos

$$Z = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{m} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n}}}$$

o

$$Z = 2\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\left(\arcsen\sqrt{\hat{p}_X} - \arcsen\sqrt{\hat{p}_Y}\right)$$

Para cada test

$$\begin{array}{l} H_0: p_X = p_Y \\ H_1: p_X \neq p_Y \end{array} \Rightarrow RC = \{ |Z| \geq z_{1-\alpha/2} \}$$

$$\begin{array}{l} H_0: p_X = p_Y \\ H_1: p_X < p_Y \end{array} \Rightarrow RC = \{ Z \leq z_{\alpha} \}$$

$$H_0: p_X = p_Y \Rightarrow RC = \{ Z \geq z_{1-\alpha} \}$$
$$H_1: p_X > p_Y$$

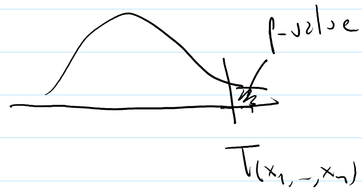
<u>Definición:</u> p-value (valor p) Dada una prueba de hipótesis

$$H_0: \theta \in A$$
$$H_1: \theta \notin A$$

con región crítica, $RC = \{T \geq k\}$ con $T(x_1, \dots, x_n)$ un estimador de θ.

Se define el p-value como $\sup\limits_{\theta \in A} P(T \geq T(x_1, \dots, x_n))$

donde $T(x_1, \dots, x_n)$ es el estimador evaluado en la muestra.



<u>Proposición</u> Si los supremos se realizan en un mismo $\theta_0 \in A$

entonces no rechazo H_0 al nivel $\alpha \iff \alpha < \text{p-value}$

<u>Dem:</u> Sea k tal que $\alpha = \sup\limits_{\theta \in A} P(T(X_1, \dots, X_n) \geq k)$

Sea $\tilde{X} = (x_1, \dots, x_n)$ la realización de la muestra

Si $\alpha < \text{p-value} \Rightarrow$

$$\alpha = P_{\theta \in A}(T(X_1, \dots, X_n) \geq k) < P_{\theta \in A}(T(X_1, \dots, X_n) \geq T(\tilde{X}))$$

Como el supremo se realiza en θ_0

$$\alpha = \sup_{\theta_0} P(T(X_1, \dots, X_n) \geq k) < P_{\theta_0}(T(X_1, \dots, X_n) \geq T(\tilde{X}))$$

luego $T(\tilde{X}) < k$ o sea $\tilde{X} \in RC$ y no rechazo H_0

El razonamiento es análogo si $\alpha > \text{p-value}$ $\square$

<u>Ejemplo 1</u> Se aplica un test de atención a una muestra de 145 personas. Se obtuvo $\bar{X} = 32$ y $s = 15$. El baremo del test dice que en la población la media es de 35 y la varianza 281. ¿Es compatible lo observado con lo que dice el baremo a un nivel $\alpha = 0{,}05$? ¿Es coherente la varianza obtenida con lo dado por el baremo?

a) Tenemos un test de hipótesis

$$H_0: \mu = 35$$

$H_1: \mu \neq 35$

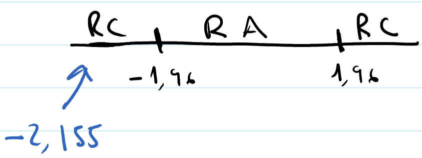
Como conocemos la varianza el estadístico a usar es

$$Z = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}$$

En nuestro caso

$$Z = \frac{\sqrt{145}\,(32-35)}{\sqrt{281}} = -2{,}155$$

La región crítica para $\alpha = 0{,}05$ es



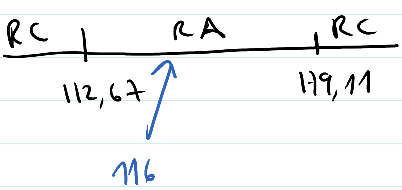
Como Z cae en la RC rechazo H_0 o sea

b) $H_0: \sigma^2 = 281$
$H_1: \sigma^2 \neq 281$

El estadístico es $\chi^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2}$

$$\chi^2 = \frac{(144)(15)^2}{281} \simeq 116$$

χ^2 tiene distribución chi-cuadrado con 144 grados de libertad. La RC queda



El estadístico cae en la región de aceptación (RA) por lo que no rechazo H_0

<u>Ejemplo</u> Se desea saber la postura respecto a la implantación de un nuevo plan de estudio de los estudiantes de la facultad de Derecho. Se toma una m.a.s de 1000 estudiantes. 400 estudiantes se manifestaron a favor. ¿Es compatible estos datos con el pensar que la proporción de estudiantes a favor y en

contra a la misma? Usar $\alpha = 0,05$

Tenemos $H_0 : p = 0,5$

$H_1 : p \neq 0,5$

Usaremos $$Z = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sim N(0,1)$$

$$\hat{p} = \frac{400}{1000} = 0,4$$

$$Z = \frac{(0,40 - 0,50)\sqrt{1000}}{\sqrt{(0,5)(0,5)}} = -6,325$$

La RC es

RC | $-1,96$ | RA | $1,96$ | RC

Se rechaza H_0

Test para dos muestras dependientes

Consideremos el caso donde en cada sujeto se tienen 2 medidas (pareadas) Y_{j1}, Y_{j2} $j = 1, \dots, n$

Definimos la diferencia $d_j = Y_{j1} - Y_{j2}$ es decir la diferencia entre la medida del sujeto j en la ocasión 1 y en la ocasión 2

Supongamos que los d_j son normales o $n \geq 30$, se supone además que la varianza poblacional de las diferencias es desconocida. Las diferencias son aleatorias

Se quiere probar alguna de las hipótesis

1) H_0 $\mu_D = 0$ 2) H_0 $\mu_D \geq 0$ 3) H_0 $\mu_D \leq 0$

H_1 $\mu_D \neq 0$ $\quad$ H_1 $\mu_D < 0$ $\quad$ H_1 $\mu_D > 0$

El estadístico a usar es $$T = \frac{\bar{D}}{\hat{S}_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Las RC son para cada caso

1) $\{ |T| \geq t_{n-1, 1-\alpha/2} \}$

2) $\{ T \leq t_{n-1, \alpha} \}$

3) $\{T \geq t_{n-1,\,1-\alpha}\}$

Obs: Si se conoce σ la desviación de las diferencias en lugar del estadístico T usamos el Z

$$Z = \frac{\bar{D}}{\sigma_D/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Los cambios en las RC son obvios.

Test para contraste de varianzas para variables dependientes

Supongamos que las poblaciones son normales o que $n \geq 30$

Las hipótesis que se quieren probar son

1) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 2) $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ 3) $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$

$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

El estadístico a usar es

$$T = \frac{(s_1^2 - s_2^2)\sqrt{n-2}}{2\, s_1 s_2 \sqrt{1-r_{12}}} = \frac{\sqrt{n-2}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{j1}^2 - \sum_{j=1}^{n} y_{j2}^2\right)}{2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_{j1}^2 \sum_{j=1}^{n} y_{j2}^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} y_{j1} y_{j2}\right)^2}}$$

$$T \sim t_{n-2}$$

Las RC quedan

1) $\{|T| \geq t_{n-2,\,1-\alpha/2}\}$

2) $\{T \leq t_{n-2,\,\alpha}\}$

3) $\{T \geq t_{n-2,\,1-\alpha}\}$

Contraste para proporciones para variables dependientes

El ejemplo clásico de este tipo de problemas es cuando se quiere comparar una proporción antes y después de un tratamiento a un grupo de sujetos

Se quiere probar alguna de las siguientes hipótesis

$H_0: p_{21} = p_{12}$ $\qquad$ $H_0: p_{21} \geq p_{12}$ $\qquad$ $H_0: p_{21} \leq p_{12}$

$H_1: p_{21} = p_{12}$ $\qquad$ $H_1: p_{21} < p_{12}$ $\qquad$ $H_1: p_{21} > p_{12}$

donde p_{21} es la proporción de sujetos que puntúan 2 en la primera medida y 1 en la segunda

p_{12} es la proporción de sujetos que puntúan 1 en la primera y 2 en la segunda.

De los datos se tendría el siguiente cuadro

		Segunda medida		
		si = 1	no = 2	
Primera medida	si = 1	n_{11}	n_{12}	$n_{1\cdot}$
	no = 2	n_{21}	n_{22}	$n_{2\cdot}$
		$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	n

H_0 $\quad n' = n_{12} + n_{21}$ cambios independientes

El estadístico a tomar es B (n_{12} o n_{21})

B tiene distribución $Bin(n', 0,5)$

Si B toma el valor $b \Rightarrow$ el p-valor se puede tomar como

$p = 2P(B \leq b)$ si tomamos el $\min\{n_{12}, n_{21}\}$ y

$p = 2P(B \geq b)$ si tomamos el $\max\{n_{12}, n_{21}\}$

Para H_1 $p_{21} < p_{12}$, $p = P(B \leq b)$ con $b = n_{21}$

H_1 $p_{21} > p_{12}$, $p = P(B \geq b)$ con $b = n_{21}$

Se puede tomar como alternativa si $n' > 20$

$$Z = \frac{n_{21} - n_{12}}{\sqrt{n_{21} + n_{12}}} \sim N(0,1)$$

Las regiones críticas se hacen como siempre.

Observar que $\hat{p}_{\cdot 1}$ $\quad \hat{p}_{1\cdot}$

$$Z = \frac{\cancel{n_{\cdot 1}/n} - \cancel{n_{1\cdot}/n}}{\sqrt{(n_{21} + n_{12})/n^2}}$$

Intervalos de confianza

Para μ_D se obtiene que el IC de $(1-\alpha)\%$ es

$$\left[\bar{D} - t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{\hat{S}_D}{\sqrt{n}} , \bar{D} + t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{\hat{S}_D}{\sqrt{n}} \right]$$

Para $P_{\cdot 1} - P_{1\cdot}$ es:

$$\left[(\hat{P}_{\cdot 1} - \hat{P}_{1\cdot}) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{(n_{12}+n_{21})/n^2} , (\hat{P}_{\cdot 1} - \hat{P}_{1\cdot}) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{(n_{12}+n_{21})/n^2} \right]$$

Test de bondad de ajuste

Consideremos una m.a.s $X_1, \dots, X_n$ con $X \sim F_X$ desconocida. Queremos ver si F_X es una distribución F_0 conocida

Es decir
$$H_0 \quad F_X = F_0$$
$$H_1 \quad F_X \neq F_0$$

Veremos dos pruebas
1) test χ^2 de bondad de ajuste
2) Test de Kolmogorov-Smirnov

1) Test χ^2

Dado $k \in \mathbb{N}$ se eligen k intervalos $I_1, \dots, I_k$ en $\mathbb{R}$ tal que $I_1 = (-\infty, a_1]$, $I_k = (a_k, +\infty]$, $I_i = (a_{i-1}, a_i]$
con $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = \mathbb{R}$ y $I_i \cap I_j = \emptyset \quad i \neq j$

Si H_0 es cierto $P(X \in I_j) = F_0(a_j) - F_0(a_{j-1}) = F_0(I_j)$

Sea F_n^* la distribución empírica de la muestra y ya sabemos que $F_n^*(I_j) \xrightarrow{c.s} F_X(I_j)$

Sabemos que $F_n^*(I_j) \xrightarrow{c.s} F_X(I_j)$

Sea b_j la cantidad de observaciones en I_j. El valor esperado de la cantidad de observaciones en I_j si se verifica H_0 es

$e_j = nF_0(I_j)$

Si definimos el estadístico $X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j}$ este estadístico se prueba que $X^2 \sim \chi^2_{k-1}$ asintóticamente y se pueden entonces encontrar la región crítica $\{X^2 \geq l\}$ con

$\alpha = P(X^2 \geq l)$

$l = \chi^2_{k-1, 1-\alpha}$

2) Test de Kolmogorov - Smirnov

Como $F_n^*(x) \xrightarrow{c.s} F_0(x)$ si se verifica H_0 es natural tomar como estadístico $D_n = \sup_{x \in D} |F_n^*(x) - F_0(x)|$

Para saber la distribución asintótica de D_n se tiene el siguiente teorema de Kolmogorov.

<u>Teorema:</u> Si F_0 es continua $\lim_{n \to +\infty} P(\sqrt{n} D_n \leq x) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-2n^2x^2}$

La región crítica $\Rightarrow$ es $RC = \{D_n \geq k\}$ el k se halla mediante tablas o un software para que $\alpha = P(D_n \geq k)$

Pruebas de Normalidad

Prueba de normalidad de Lilliefors

La prueba de normalidad de Lilliefors utiliza el estadístico de KS cuando la media y el desvío se estiman usando la muestra.

El estadístico $KSL = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F_n^*(x) - \phi\left(\frac{x-\overline{X}}{s}\right) \right|$

Lilliefors tabuló los percentiles de este estadístico por el método de Montecarlo.

Prueba de normalidad de D'Agostino

Consideremos una m.a.s $X_1, \dots, X_n$ y $X_1^*, \dots, X_n^*$ la muestra ordenada el estadístico de D'Agostino vale

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(i - \frac{n+1}{2}\right) X_i^*}{n^2 \, S^2}$$

con $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

Se tiene que $E(D) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

Para tamaños pequeños D está tabulado y para tamaños muestrales grandes

$$\sqrt{n} \; \frac{D - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}}{\left(\frac{12\sqrt{3} - 27 + 2\pi}{24\pi}\right)^{1/2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Test de Hipótesis para medidas de posición

Prueba de los Signos:

Se puede realizar un test de hipótesis sobre la mediana o sea

1) $H_0 \; \eta = \eta_0$ $H_1 \; \eta \neq \eta_0$

2) $H_0 \; \eta \leq \eta_0$ $H_1 \; \eta > \eta_0$

3) $H_0 \; \eta \geq \eta_0$ $H_1 \; \eta < \eta_0$

Para realizar este contraste se compara cada medida con respecto a la mediana. Si $X_i > \eta_0$ se coloca el signo $+$. Si $X_i < \eta_0$ se coloca el signo $-$. Si aparecen 0 estos pueden desecharse si son pocos y por ello se reduce el tamaño de la muestra. Si son muchos entonces la prueba no es adecuada

Sea S_+ el número de signos $+$

S_- el número de signos $-$

Se utiliza el estadístico S_+ o S_- según la dirección de la hipótesis

S_+ o S_- se distribuyen binomiales con parámetro $n = S_+ + S_-$ y $p = 0{,}5$ bajo la hipótesis nula. Para hallar la región crítica se recurre a esta distribución.

Si $n > 20$ se puede utilizar la aproximación a la normal

$$Z = \frac{S_+ - n/2}{\sqrt{n/4}} \sim N(0,1)$$

y se construyen las RC como siempre.

Test de Wilcoxon

Esta prueba en vez de utilizar los signos utiliza los rangos

Primeramente se calculan las diferencias de cada medida con la mediana y se quitan las diferencias iguales a 0.

Las diferencias tomadas en valor absoluto se ordenan de menor a mayor y se les atribuye el número que indica su orden.

Si hay empates se le da a esas diferencias el promedio de los

rangos correspondientes.
Luego se suman los rangos de las diferencias positivas T_+ y se suman los rangos de las diferencias negativas T_-

Si la H_0 es cierta se espera que $T_+ \cong T_-$

Si $n \geq 20 \Rightarrow$ podemos hacer una aproximación a la normal

$$Z = \frac{T - \frac{(T_+ + T_-)}{2}}{\sigma_T} = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \sim N(0,1)$$

Cuando el número de empates es elevado se introduce una corrección quedando

$$Z = \frac{(T_+ \text{ ó } T_-) \pm 0{,}5 - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{\sum_{j=1}^{k} t_i^3 - \sum_{j=1}^{k} t_i}{}}} \sim N(0,1)$$

con k número de rangos empatados

t_i número de valores involucrados en cada empate

Test χ^2 de homogeneidad

Se quiere contrastar la hipótesis nula que c proporciones con que se presenta una cierta característica en c categorías de una variable son iguales en m poblaciones.
Se extrae una muestra aleatoria en cada una de las m poblaciones y se obtiene el siguiente cuadro

		Muestra				
		1	2 ..	i	m	
Variable	1	f_{11} f_{12}		f_{1i}	f_{1m}	f_1
	2	f_{21}	f_{22}	f_{2i}	f_{2m}	f_2
	⋮					
	j	f_{j1}	f_{j2}	f_{ji}	f_{jm}	f_j

j	f_{j1}	f_{j2}	f_{ji}	f_{jm}	f_j
c	f_{c1}	f_{c2}	f_{ci}	f_{cm}	f_c
	n_1	n_2	n_i	n_m	n

Con f_{ji} frecuencia empírica de la categoría j en la muestra i

e_{ji} frecuencia esperada en la categoría j de la muestra i (bajo H_0)

f_j frecuencia empírica de la categoría j

n_i tamaño de la muestra i

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

$$e_{ji} = \frac{n_i f_j}{n}$$

Se usa el estadístico
$$X^2 = \sum_{j=1}^{c} \sum_{i=1}^{m} \frac{(f_{ji} - e_{ji})^2}{e_{ji}} \sim \chi^2_{(m-1)(c-1)}$$

A partir de esto se arma la región crítica.

$$RC = \{ X^2 \geq \chi^2_{(m-1)(c-1),\, 1-\alpha} \}$$

Test de Kolmogorov - Smirnov para comparar dos distribuciones

Supongamos que se quiere ver si las distribuciones de una variable son iguales en dos poblaciones.
Tomemos una muestra de tamaño n_1 en la población I, y una muestra de tamaño n_2 en la población II. Las muestras tomadas independientes.

Tenemos

1) $H_0: F_1(x) = F_2(x) \quad \forall x$
$H_1: F_1(x) \neq F_2(x)$ para al menos un x

1) $H_1: \quad F_1(x) \neq F_2(x)$ para al menos un x

o también

2) $H_0: \quad F_1(x) \leq F_2(x) \quad \forall x$
$H_1: \quad F_1(x) > F_2(x)$ para al menos un x

El estadístico a usar es

$$D = \max |F^*_{n,1}(x) - F^*_{n,2}(x)|$$

Este estadístico D de Kolmogorov-Smirnov está tabulado

Para el caso 1) la RC queda

$$RC = \{ |D| \geq d_{n_1,n_2,1-\alpha/2} \}$$

y en el caso 2) $RC = \{ D \geq d_{n_1,n_2,1-\alpha} \}$

Test de Mann-Whitney-Wilcoxon (W)

Este test permite comparar la tendencia central de dos distribuciones poblacionales en dos muestras independientes de tamaños n_1 y n_2 respectivamente. Se quiere contrastar si dos muestras pertenecen a una misma población.
Para aplicar este test se ordena la muestra en conjunto, es decir se juntan las dos muestras y se ordena.
A cada dato se le asigna el número de su orden, (si hay empates se asigna como orden el promedio de los órdenes de los datos iguales.
Luego se toma como estadístico W la suma de los órdenes de alguno de los grupos es decir

$$W = \sum_{j \in \text{grupo } 1} O_j \quad ó \quad W = \sum_{j \in \text{grupo } 2} O_j$$

La distribución de W está tabulada y de allí se pueden armar las regiones críticas y calcular el p-valor.

Si $n_1 \geq 2$ y $n_2 > 10$ se puede hacer una aproximación a la normal tomando

$$Z = \frac{(W \pm 0{,}5) - E(W)}{\sqrt{Var(W)}} = \frac{(W \pm 0{,}5) - \frac{n_1(n_1+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}} \sim N(0,1)$$

obs: Se resta 0,5 si $W > E(W)$
Se suma 0,5 si $W < E(W)$

Test de los Signos para medianas de muestras dependientes

Supongamos que a n sujetos se les mide una variable Y en un momento 1 y en un momento 2. Obtenemos

Momento 1	Y_{11} ...	Y_{j1} ...	$Y_{n,1}$
Momento 2	Y_{12}	Y_{j2}	$Y_{n,2}$

A cada pareja de datos le asignamos un signo + o un signo − de acuerdo a la siguiente regla

Si $Y_{j1} > Y_{j2}$ asigno +

$Y_{j1} < Y_{j2}$ asigno −

El estadístico de contraste se define como el número de signos + ó el numero de signos − y lo notamos con S
Este estadístico se distribuye Binomial de parámetros $p = 0{,}5$ y n

Si $n > 20$ se puede usar una aproximación a la normal

$$Z = \frac{(S \pm 0{,}5) - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{S \pm 0{,}5 - n/2}{\sqrt{n/4}} \sim N(0,1)$$

Se suma 0,5 si $S < n/2$ y se resta 0,5 si $S > n/2$

Test de Wilcoxon para comparar medianas de muestras dependientes

Como en el caso de los test de signos a cada diferencia le asignamos un signo ⊕ o un signo ⊖. Además ordenamos las diferencias por la magnitud de su valor absoluto (o sea independientemente del signo)
El estadístico W de Wilcoxon se define como la suma de ordenes negativos o positivos y se encuentra tabulado

Se puede para $n \geq 15$ aproximar a una normal mediante

$$Z = \frac{(W \pm 0{,}5) - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \sim N(0,1)$$

Se suma 0,5 si $W < \frac{n(n+1)}{4}$ y se resta si $W > \frac{n(n+1)}{4}$

Test χ^2 de independencia

Consideremos dos variables donde la variable 1 toma c categorías y la variable 2 r categorías. Se toma una muestra de tamaño n de una población y se ven las frecuencias de todas las posibles combinaciones.
Se tendrá una tabla como la que sigue

Variable 2

		1	2	... i ...	r	
Variable 1	1	f_{11}	f_{12}	f_{1i}	f_{1r}	$f_{1\cdot}$
	2	f_{21}	f_{22}	f_{2i}	f_{2r}	$f_{2\cdot}$
	⋮					
	j	f_{j1}	f_{j2}	f_{ji}	f_{jr}	$f_{j\cdot}$
	⋮					
	c	f_{c1}	f_{c2}	f_{ci}	f_{cr}	$f_{c\cdot}$
		$f_{\cdot 1}$	$f_{\cdot 2}$	$f_{\cdot i}$	$f_{\cdot r}$	n

donde f_{ji} frecuencia empírica de la categoría j de la variable 1 y la categoría i de la variable 2

$f_{j\cdot}$ frecuencia de la categoría j de la variable 1

$f_{\cdot i}$ frecuencia de la categoría i de la variable 2

e_{ji} valor esperado de la frec de la categoría j de la variable 1 y la categoría i de la variable 2 bajo H_0

$$e_{ji} = \frac{f_{j\cdot}\, f_{\cdot i}}{n}$$

El estadístico es $$\chi^2 = \sum_{j=1}^{c} \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_{ji} - e_{ji})^2}{e_{ji}} \sim \chi^2_{(c-1)(r-1)}$$

La $RC = \{ \chi^2 \geq \chi^2_{(c-1)(r-1),1-\alpha}$