Clase 12

viernes, 28 de septiembre de 2018 19:44

Nivel del Test Unión - Intersección (UIT)

Un test unión intersección es de la forma

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{con} \quad \Theta_0 = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \Theta_\gamma$$

Si $\lambda_\gamma(x)$ es LRT para $H_{0\gamma} : \theta \in \Theta_\gamma$ versus $H_{1\gamma} : \theta \in \Theta_\gamma^c$

Sea $\lambda(x)$ el LRT para $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$ se tiene que:

Teorema 73: Consideremos el test para

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$
$$H_1 : \theta \in \Theta_0^c$$

con $\Theta_0 = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \Theta_\gamma$ y $\lambda_\gamma(x)$ como se definió recién

Sea $T(x) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma(x)$ y la región de rechazo dada por:

$$\{x : \lambda_\gamma(x) < c \text{ para algún } \gamma \in \Gamma\} = \{x : T(x) < c\}$$

Consideremos el test LRT con región de rechazo $\{x : \lambda(x) < c\}$

Entonces:

a) $T(x) \geq \lambda(x) \quad \forall x$

b) Si $\beta_T(\theta)$ y $\beta_\lambda(\theta)$ son las funciones de potencia basadas en T y λ respectivamente entonces:

$$\beta_T(\theta) \leq \beta_\lambda(\theta) \quad \forall\, \theta \in \Theta$$

c) Si el LRT es de nivel α entonces el test de unión-intersección tiene nivel α

Dem: Como $\Theta_0 = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \Theta_\gamma \subset \Theta_\gamma$ para todo γ

entonces para todo x

$$\lambda_\gamma(x) \geq \lambda(x) \text{ para cada } \gamma \in \Gamma$$

ya que

$$\lambda_\gamma(x) = \frac{\sup_{\Theta_\gamma} L(\theta/x)}{\sup_{\Theta} L(\theta/x)} \geq \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta/x)}{\sup_{\Theta} L(\theta/x)} = \lambda(x)$$

O sea $T(x) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma(x) \geq \lambda(x)$ lo que prueba a)

Ahora por a) $\{x : T(x) < c\} \subset \{x : \lambda(x) < c\}$ luego

$$\beta_T(\theta) = P_\theta(T(X) < c) \leq P_\theta(\lambda(X) < c) = \beta_\lambda(\theta)$$ lo que

prueba b)

Como b) se cumple para todo θ

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} \beta_T(\theta) \le \sup_{\theta\in\Theta_0} \beta_\lambda(\theta) \le \alpha$$

lo que prueba c)

La prueba del teorema nos muestra que el test LRT es uniformemente más potente que el UIT. Cabría preguntarse porqué usaríamos este test. Una razón es que el UIT tiene un error tipo I menor que el LRT para todo $\theta\in\Theta_0$

Ahora si tenemos un test intersección unión. (IUT)
En este test $H_0: \theta\in\Theta_0$
$H_1: \theta\in\Theta_0^c$ con $\Theta_0 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\Theta_\gamma$

Recordamos que la región crítica $R = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ donde

R_γ es la región crítica del test $H_{0\gamma}: \theta\in\Theta_\gamma$

Teorema 74: Sea α_γ el nivel del test $H_{0\gamma}$ con región de rechazo R_γ.
Entonces el test IUT con región de rechazo $R = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ tiene nivel $\alpha = \sup_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma$

tiene nivel $\alpha = \sup_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma$

Dem: Sea $\theta \in \Theta_0$, entonces $\theta \in \Theta_\gamma$ para algún γ y

$$P_\theta(X \in R) \leq P_\theta(X \in R_\gamma) \leq \alpha_\gamma \leq \alpha$$

Como $\theta \in \Theta_0$ es arbitrario entonces α es un nivel del test

Si elegimos R_γ tal que $\alpha_\gamma = \alpha \ \forall \gamma$ entonces el teorema establece que el IUT es un test de nivel α

El teorema que sigue da condiciones bajo las cuales el tamaño del IUT es exactamente α (el test no es muy conservador)

Teorema 75: Sea el test $H_0: \theta \in \bigcup_{j=1}^{k} \Theta_j$ con $k > 0$ entero y finito. Para cada $j = 1, \ldots, k$ sea R_j la región de rechazo para un test de nivel α para H_{0j}.
Supongamos que algún i, con $i = 1, \ldots, k$ existe una sucesión de parámetros $\theta_\ell \in \Theta_i$ con $\ell = 1, \ldots$ tal que

i) $\lim_{\ell \to \infty} P_{\theta_\ell}(X \in R_i) = \alpha$

ii) para cada $j = 1, \ldots, k$ $j \neq i$ $\lim_{\ell \to \infty} P_{\theta_\ell}(X \in R_j) = 1$

Entonces el IUT con región de rechazo $R = \bigcap_{j=1}^{k} R_j$

es un test de tamaño α.

Dem: Por el teorema 74, se tiene que

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta (X \in R) \leq \alpha$$

Como $\theta_\ell \in \Theta_i \subset \Theta_0$

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(X \in R) \geq \lim_{\ell \to \infty} P_{\theta_\ell}(X \in R) =$$

$$= \lim_{\ell \to \infty} P_{\theta_\ell}\left(X \in \bigcap_{j=1}^{\ell} R_j\right) = \lim_{\ell \to \infty} \left(1 - P_{\theta_\ell}\left(X \in \bigcup_{j=1}^{k} R_j^c\right)\right) \geq$$

$$\geq \lim_{\ell \to \infty} \left(1 - \sum_{j=1}^{k} P_{\theta_\ell}(R_j^c)\right) = \lim_{\ell \to \infty} \left(1 - \sum_{j=1}^{k} (1 - P_{\theta_\ell}(R_j))\right) =$$

$$= \lim_{\ell \to \infty} \left(1 - k + \sum_{j=1}^{k} P_{\theta_\ell}(R_j)\right) = \lim_{\ell \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{k} P_{\theta_\ell}(X \in R_j) - (k-1)\right)$$

$$= \underbrace{(k-1) + \alpha}_{\text{por i) y ii)}} - (k-1) = \alpha$$

o sea el tamaño del test es α

Definición 76 (p-values)

Un p-value $p(X)$ es un estadístico que cumple $0 \leq p(X) \leq 1$ para toda muestra X

Un p-value es válido si para todo $\theta \in \Theta_0$ y todo $0 \leq \alpha \leq 1$

$$P_\theta\left(p(X) \leq \alpha\right) \leq \alpha$$

Valores chicos de $p(X)$ dan evidencia que H_1 es verdadera.
Si $p(X)$ es un p-value válido es fácil construir un test de nivel α basado en $p(X)$.
El test que rechaza H_0 si y sólo si $p(X) \leq \alpha$ es un test de nivel α.

La forma más común de definir un p-value válido es mediante:

Teorema 77: Sea $W(X)$ un estadístico del test tal que valores grandes de W da evidencia que H_1 es verdadera. Para cada punto muestral x definamos

$$p(x) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\left(W(X) \geq W(x)\right)$$

entonces $p(X)$ es un p-value válido.

Dem: Sea $\theta \in \Theta_0$ fijo.
Sea $F_\theta(w)$ la función de distribución de $-W(X)$ y definamos

$$p_\theta(x) = P_\theta\left(W(X) \geq W(x)\right) = P_\theta\left(-W(X) \leq -W(x)\right) = F_\theta\left(-W(x)\right)$$

$$P_\theta\left(p_\theta(X)\le\alpha\right) = P_\theta\left(F_\theta(-W(X))\le\alpha\right) =$$

$$= P_\theta\left(-W(X)\le F_\theta^{-1}(\alpha)\right) = F_\theta\left(F_\theta^{-1}(\alpha)\right)\le\alpha$$

(se da la igualdad si F es continua creciente y la desigualdad si F es discreta)

Dado que $p(x) = \sup_{\theta'\in\Theta_0} p_{\theta'}(x) \ge p_\theta(x) \quad \forall x$

$$P_\theta\left(p(X)\le\alpha\right) \le P_\theta\left(p_\theta(X)\le\alpha\right)\le\alpha$$

Esto es verdadero para todo $\theta\in\Theta_0$ y para todo $0\le\alpha\le 1$ luego $p(X)$ es un p-valor válido.

Ejemplo Sea $X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$ y el test

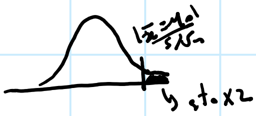
$$H_0: \mu=\mu_0$$
$$H_1: \mu\ne\mu_0$$

En el práctico veremos que el LRT rechaza H_0 para valores grandes de $W(X) = \dfrac{|\bar{X}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}$

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \text{ bajo } H_0$$

$$p(x) = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(W(X)\ge W(x)\right) = \underbrace{P_{\mu_0,\sigma^2}\left(\overbrace{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}}^{\sim t_{n-1}} \ge \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}\right)}_{\text{no depende de } \sigma^2}$$

$$= 2\,P_{\mu_0,\sigma^2}\left(t_{n-1}\ge\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}\right)$$



Otra manera para definir un p-valor válido es condicionar sobre un estadístico suficiente.

Supongamos que $S(X)$ es un estadístico suficiente para el modelo $\{f(x/\theta) : \theta \in \Theta_0\}$

Si la hipótesis nula es verdadera, la distribución condicional de X dado $S=s$ no depende de θ

Sea nuevamente $W(X)$ un estadístico que valores grandes de $W(X)$ da evidencia que H_1 es cierta

Entonces para cada muestra x definimos

$$p(x) = P(W(X) \geq W(x) / S = S(x))$$

Trabajando igual que en el teorema 77 se puede ver

$$P(p(X) \leq \alpha / S = s) \leq \alpha$$

Entonces para todo $\theta \in \Theta_0$ tenemos

$$P_\theta(p(X) \leq \alpha) \overset{\text{si } S \text{ es discreta}}{=} \sum_s P(p(X) \leq \alpha | S = s) P_\theta(S = s)$$

$$\leq \alpha \sum_s P_\theta(S = s) \leq \alpha$$

Si S es continua reemplazamos la suma por integrales

Luego $p(X)$ es un p-valor válido