Clase 10

jueves, 20 de septiembre de 2018 12:20

Docimasia de Hipótesis

Definición 59: Una hipótesis es una declaración acerca de un parámetro poblacional

Obs: Notar que la hipótesis refiere al parámetro poblacional no refiere a la muestra.

Definición 60: Dos hipótesis complementarias en un problema de docimasia de hipótesis son llamadas la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. Las notaremos por H_0 y H_1 respectivamente

Si θ es el parámetro en general las notaremos por

$$H_0: \theta \in \Theta_0$$
$$H_1: \theta \in \Theta_0^c$$

donde $\Theta_0 \subset \Theta$ el espacio de parámetros

En la docimasia de hipótesis luego de observar la muestra el investigador debe decidir si acepta H_0 es decir la considera verdadera (o no hay evidencia para decir que es falsa) o si la rechaza (la considera falsa) y por lo tanto considera H_1 como verdadera.

verdadera.

Definición 61: Un procedimiento de dócimasia de hipótesis es una regla de decisión que especifica
i) Para cuales valores muestrales se acepta H_0
ii) Para que valores muestrales se rechaza H_0 y se acepta H_1

Al conjunto del espacio de muestras para las cuales H_0 es rechazada región crítica (o de rechazo) y el conjunto donde H_0 es aceptada (complemento del anterior) se llama región de aceptación.

Típicamente lo anterior se especificará en términos de un estadístico $W(X_1, \ldots, X_n) = W(X)$ que es función de la muestra.

Veamos a continuación algunos métodos para encontrar test para la dócimasia de hipótesis

Test de Razón de verosimilitud

Definición 62 El estadístico de razón de verosimilitud para $H_0: \theta \in \Theta_0$ versus $H_1: \theta \in \Theta_0^c$ es

$$\sup_{\Theta} L(\theta | x)$$

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta|x)}{\sup_{\Theta} L(\theta/x)}$$

El test de razón de verosimilitud (LRT) es cualquier test cuya región de rechazo es

$$\{x : \lambda(x) \leq c\}$$

donde c es un número que satisface $0 \leq c \leq 1$

Para la interpretación pensemos en una función de probabilidad, al calcular $\sup_{\Theta_0} L(\theta/x)$ calculamos la máxima probabilidad de la muestra observada cuando el parámetro está en Θ_0, análoga interpretación es para el denominador. Luego si $\lambda(x)$ es chico implica que hay parámetros en Θ que tienen valores del parámetro que no están en Θ_0 tal que la muestra tiene una probabilidad de ocurrencia "mucho" mayor. O sea esto implica rechazar H_0 y aceptar H_1

Si pensamos en términos de la estimación máximo verosimil entonces si $\hat{\theta}$ es el estimador M.V de θ el cual se obtiene maximizando $L(\theta/x)$ sobre Θ. Supongamos ahora que $\hat{\theta}_0$ es el estimador M.V pero en Θ_0 entonces

$$\lambda(x) = \frac{L(\hat{\theta}_0/x)}{\ldots}$$

$$\lambda(x) = \frac{L(\hat{\theta}_0/x)}{L(\hat{\theta}/x)}$$

y queda clara la relación entre la estimación M.V y el estadístico de razón de verosimilitud.

Ejemplo: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, 1)$. Se realizará la dócima entre

$$H_0 \quad \mu = \theta_0$$

$$H_1 \quad \mu \neq \theta_0$$

Es claro que el numerador es $L(\theta_0/x)$ pues en Θ_0 hay solo un valor θ_0

Ya sabemos que el estimador MV en este caso es $\bar{X}$

luego

$$\lambda(x) = \frac{L(\theta_0/x)}{L(\bar{X}/x)} =$$

$$= \frac{\cancel{(2\pi)^{-n/2}} \; e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}{2}}}{\cancel{(2\pi)^{-n/2}} \; e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2}}} =$$

$$= e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2}}$$

$$\sum^{n} (x_i - \theta_0)^2 \quad \sum^{n} (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \theta_0)^2$$

ahora $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\theta_0)^2 =$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + 2(\bar{x}-\theta_0)\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}^{=0} + n(\bar{x}-\theta_0)^2$$

o sea $\lambda(x) = e^{-\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{2}}$

la región de rechazo de H_0 es

$\{x : \lambda(x) \leq c\} = \{x : \log\lambda(x) \leq \log c\} =$

$= \{x : -\frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{2} \leq \log c\} =$

$= \{x : (\bar{x}-\theta_0)^2 \geq \frac{-2\log c}{n}\} = \{x : |\bar{x}-\theta_0| \geq \sqrt{\frac{-2\log c}{n}}\}$

o sea se rechaza si la media muestral difiere del valor θ_0 más que un valor especificado
Como $0 \leq c \leq 1$ es claro que $\sqrt{\frac{-2\log c}{n}}$ variará

entre 0 y $+\infty$

Teorema 63: Si $T(X)$ es un estadístico suficiente para θ, y $\lambda^*(t)$ y $\lambda(t)$ son los estadísticos LRT basados en T y en X respectivamente entonces

$\lambda^*(T(x)) = \lambda \ldots$

$\lambda^*(T(x)) = \lambda(x)$ para todo x en el espacio de las muestras

Dem: Por el teorema de factorización la función de densidad (o de probabilidad) de X (la muestra) puede escribirse como

$$f(x/\theta) = g(T(x)|\theta)\, h(x) \quad \text{donde}$$

$g(t/\theta)$ es la función de densidad (o probabilidad) de T y $h(x)$ no depende de θ

A partir de esto

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta/x)}{\sup_{\Theta} L(\theta/x)} = \frac{\sup_{\Theta_0} f(x/\theta)}{\sup_{\Theta} f(x/\theta)} =$$

$$= \frac{\sup_{\Theta_0} g(T(x)/\theta)\, h(x)}{\sup_{\Theta} g(T(x)/\theta)\, h(x)} = \frac{\sup_{\Theta_0} g(T(x)/\theta)}{\sup_{\Theta} g(T(x)/\theta)} =$$

$$= \frac{\sup_{\Theta_0} L^*(\theta|T(x))}{\sup_{\Theta} L^*(\theta/T(x))} = \lambda^*(T(x)) \qquad \square$$

Veamos ahora un ejemplo con un parámetro de ruido o molesto

Ejemplo $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ desconocido.

Queremos testear $H_0: \mu \leq \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$

El parámetro σ^2 es un parámetro que estorba.

$$\lambda(x) = \frac{\max_{\{\mu, \sigma^2 : \mu \leq \mu_0, \sigma^2 \geq 0\}} L(\mu, \sigma^2 | x)}{\max_{\{\mu, \sigma^2 : -\infty \leq \mu \leq \infty, \sigma^2 \geq 0\}} L(\mu, \sigma^2 | x)} = \frac{\max_{\{\mu, \sigma^2 : \mu \leq \mu_0, \sigma^2 \geq 0\}} L(\mu, \sigma^2 | x)}{L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 | x)}$$

donde $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$ son los estimadores MV

Ahora si $\hat{\mu} \leq \mu_0$ entonces $\lambda(x) = 1$ y si $\hat{\mu} > \mu_0$ el máximo restringido a la región $(-\infty, \mu_0]$ es $L(\mu_0, \hat{\sigma}_0^2 | x)$ donde $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum (x_i - \mu_0)^2}{n}$

(Probarlo)

Luego
$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\mu} \leq \mu_0 \\ \dfrac{L(\mu_0, \hat{\sigma}_0^2 | x)}{L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 | x)} & \text{si } \hat{\mu} > \mu_0 \end{cases}$$

Test Bayesianos

En este enfoque la distribución a posteriori se puede usar para calcular la probabilidad de

que H_0 y H_1 sean ciertas
Tenemos $\pi(\theta/x)$ y a partir de estas se pueden calcular
$$P(\theta \in \Theta_0 / x) = P(H_0 \text{ es cierta} / x)$$
$$P(\theta \in \Theta_0^c / x) = P(H_1 \text{ es cierta} / \cancel{x})$$

Uno puede considerar que aceptamos H_0 si
$$P(\theta \in \Theta_0 | x) \geq P(\theta \in \Theta_0^c / x)$$
y rechazamos H_0 en otro caso

O sea la región de rechazo es
$$\{x : P(\theta \in \Theta_0^c / x) > 1/2\}$$

Alternativamente si uno quiere cubrirse de no rechazar falsamente H_0 podemos por ejemplo considerar como región de rechazo
$$P(\theta \in \Theta_0^c / x) > 0,99$$

Ejemplo: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$

y $\theta \sim N(\mu, \tau^2)$ (σ^2, μ y τ^2 conocidos)
Queremos probar
$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

Vimos que

$$\pi(\theta/\bar{x}) \sim N\left(\frac{(n\tau^2\bar{x}+\sigma^2\mu)}{n\tau^2+\sigma^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2}\right)$$

Si usamos el criterio $P(\theta \in \Theta_0/x) \geq P(\theta \in \Theta_0^c/x)$

entonces aceptamos H_0 si y solo si

$$\frac{1}{2} \leq P(\theta \in \Theta_0 | x) = P(\theta \leq \theta_0 / x)$$

Como $\pi(\theta/x)$ es simétrica esto se cumple si la media de $\pi(\theta/x)$ es menor o igual a θ_0.
o sea

$$\frac{n\tau^2\bar{X}+\sigma^2\mu}{n\tau^2+\sigma^2} \leq \theta_0$$

o sea

$$n\tau^2\bar{X} \leq \theta_0 (n\tau^2+\sigma^2)-\sigma^2\mu$$

$$\bar{X} \leq \theta_0 \frac{(n\tau^2+\sigma^2)}{n\tau^2} - \frac{\sigma^2\mu}{n\tau^2}$$

$$\bar{X} \leq \theta_0 + \sigma^2 \frac{(\theta_0-\mu)}{n\tau^2}$$

y se rechazará en caso contrario

En particular si $\mu=\theta_0$ la región de aceptación es $\bar{X} \leq \theta_0$

Test Unión-Intersección e Intersección-Unión

En caso de hipótesis nulas complicadas en algunos casos podemos usar test para hipótesis nulas simples

El método de Unión-intersección es útil cuando

$$H_0 : \theta \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \Theta_\gamma$$

Γ conjunto de índices (finito o infinito)

Supongamos que hay test para cada uno de los problemas

$$H_{0\gamma} : \theta \in \Theta_\gamma$$
$$H_{1\gamma} : \theta \in \Theta_\gamma^c$$

Digamos que la región de rechazo de cada uno de los test es:

$$\{x : T_\gamma(x) \in R_\gamma\}$$

Entonces la región de rechazo para el test unión-intersección es

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{x : T_\gamma(x) \in R_\gamma\}$$

La idea es simple, Ho es verdadera si las es cada una de las hipótesis $H_{0\gamma}$ luego si alguna se rechaza, H_0 debe ser rechazada.

En algunos casos una expresión simple se puede encontrar. Por ejemplo si la región crítica para cada hipótesis es $\{x : T_\gamma(x) > c\}$ con c no dependiendo de γ, entonces

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \{x : T_\gamma(x) > c\} = \{x : \sup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma(x) > c\}$$

Ejemplo $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconocido

Consideremos H_0 $\mu = \mu_0$

H_1 $\mu \neq \mu_0$

$$H_0 = \{\mu : \mu \leq \mu_0\} \cap \{\mu : \mu \geq \mu_0\}$$

Tenemos $H_{0L} : \mu \leq \mu_0$ $\quad H_{1L} : \mu > \mu_0$

$H_{0U} : \mu \geq \mu_0$ $\quad H_{1U} : \mu < \mu_0$

Se verá en los ejercicios que la región de rechazo ~~región~~ según el método LRT es:

$$H_{0L} \text{ es } \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_L$$

$$H_{0U} \text{ es } \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_U$$

luego la región crítica queda

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq t_L \quad \text{o} \quad \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq t_U$$

Si se cumpliese que $t_L = -t_U \geq 0$ se puede expresar lo anterior como

$$\left| \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq t_L$$

Veamos ahora el método intersección-unión

Supongamos que

$$H_0 : \theta \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Theta_\gamma$$

en este caso la región crítica es:

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \{ x : T_\gamma(x) \in R_\gamma \}$$

Si en particular tenemos regiones críticas

$\{ x : T(x) \geq c \}$ (c no depende de γ)

entonces $\displaystyle\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \{ x : T_\gamma(x) \geq c \} = \{ x : \inf_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma(x) \geq c \}$

Ejemplo: Supongamos dos parámetros de tapicería

θ_1 la fuerza media de ruptura y θ_2 la probabilidad de pasar una prueba de inflamabilidad los estándares dicta que $\theta_1 > 50$ y $\theta_2 > 0{,}95$ y se considera aceptable si cumple con los dos estándares.
Se puede modelizar este problema mediante

$$H_0: \{\theta_1 \leq 50 \text{ o } \theta_2 \leq 0{,}95\}$$

$$H_1: \{\theta_1 > 50 \text{ y } \theta_2 > 0{,}95\}$$

Supongamos $X_1, \dots, X_n$ mide la fuerza media de rotura y se distribuyen $N(\theta_1, \sigma^2)$ siendo la muestra independientes dos a dos.
Sea $Y_1, \dots, Y_m$ iid $Ber(\theta_2)$ variables que miden la inflamabilidad siendo $Y_i = 1$ si se pasa la prueba y $Y_i = 0$ si no se pasa

Ya vimos que para $H_{01}: \theta_1 \leq 50$ la región de rechazo es $\dfrac{\bar{X} - 50}{S/\sqrt{n}} > t$

y se puede ver que para $H_{02}: \theta_2 \leq 0{,}95$

la región de rechazo es (método LRT) $\sum_{i=1}^{m} Y_i > b$

Luego la región de rechazo del test intersección-unión es

$$\{(x,y) : \bar{X} - 50 > t \quad \sum^{m} y_i > b\}$$

es

$$\left\{ (x, y) : \frac{\overline{X} - 50}{s/\sqrt{n}} > t \quad y \quad \sum_{i=1}^{m} y_i > b \right\}$$