Estadística
CURE

Práctico 4

Curso 2018

EJERCICIO 1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme $\mathcal{U}(0, \theta)$, y sea $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Calcule la probabilidad de cobertura de los siguientes estimadores por intervalos de θ:

(a) $[aY, bY]$, $1 \leq a < b$

(b) $[Y + c, Y + d]$, $0 \leq c < d$.

EJERCICIO 2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra iid $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y considere el test $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Para un nivel α fijo, considere el test con región de rechazo

$$R = \{x : |\bar{x} - \mu_0| > z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\}.$$

(a) Demuestre que

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}|\mu = \mu_0\right) = 1 - \alpha.$$

(b) Deduzca que el intervalo

$$[L(x), U(x)] = [\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

obtenido *invirtiendo* la región de aceptación del test de nivel α, corresponde a un intervalo de confianza de $1 - \alpha$.

EJERCICIO 3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una población iid con distribución $Exp(\lambda)$. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la distribución mediante la inversión del test de nivel α de $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$.

EJERCICIO 4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra iid de una población con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Construya un intervalo de confianza de la forma $C(x) = (-\infty, U(x)]$ de nivel $1 - \alpha$.

Sugerencia. Utilice el Teorema de correspondencia entre regiones de aceptación y conjuntos de confianza.

EJERCICIO 5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra iid $Ber(p)$. Construya un intervalo de confianza de la forma $C(x) = (L(x_1, \ldots, x_n), 1]$ de nivel $1 - \alpha$.

EJERCICIO 6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una población iid con distribución $Exp(\lambda)$. Sea $T = \sum_i X_i$.

(a) Demuestre que la cantidad $Q(T, \lambda) := 2T/\lambda$ es una cantidad pivotal con una *gamma*$(n, 2)$, o una distribución χ^2_{2n}.

(b) Obtenga un intervalo de confianza para la media λ de la distribución utilizando la cantidad pivotal.

EJERCICIO 7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una población iid con distribución exponencial localizada, $f(x|\mu) = e^{-(x-\mu)} I_{[\mu,\infty]}(x)$. Sea $Y = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$. Demuestre que el intervalo aleatorio

$$C(Y) = \left\{ \mu : Y + \frac{1}{n} \log\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \mu \leq Y + \frac{1}{n} \log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

es un intevalo de confianza para μ de tamaño $1 - \alpha$.

EJERCICIO 8. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una población iid con distribución $Poisson(\lambda)$, y sea $Y = \sum_i X_i$. Demuestre que el intervalo aleatorio

$$C(Y) = \left\{ \lambda : \frac{1}{2n} \chi^2_{2y_0, 1-\alpha/2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2n} \chi^2_{2(y_0+1), \alpha/2} \right\}$$

es un intevalo de confianza para λ de tamaño $1 - \alpha$.