Estadística
CURE

Práctico 3 - parte (a)

Curso 2018

EJERCICIO 1. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población distribuida exponencialmente, con pdf

$$f(x|\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}$$

Considere el test de hipotesis $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs. $H : \theta > \theta_0$, donde θ_0 es un valor especificado por el experimentador.

(a) Encuentre el estadistico asociado al likelihood ratio test (LRT).

(b) Especifique un LRT de tamaño α.

EJERCICIO 2. Sea $X \sim \text{Binomial}(5, \theta)$. Recuerde que la *función de potencia* de un test de hipótesis con región de rechazo R es la función de θ definida como $\beta(\theta) = P_\theta(X \in R)$.

(a) Considere el test de hipotesis $H_0 : \theta \leq 1/2$ vs. $H_1 : \theta > 1/2$. Calcule la función de potencia, $\beta_1(\theta)$, para este test.

(b) Considere el test que rechaza H_0 si $X = 3, 4$ o 5. Calcule la función de potencia, $\beta_2(\theta)$, para este test.

(c) Grafique $\beta_1(\theta)$ y $\beta_2(\theta)$ en un mismo par de ejes, y discuta el error de Tipo I y de Tipo II asociado a cada caso.

EJERCICIO 3. Suponga que se observan m v.a. iid $Y_1, \dots, Y_m$, con $Y_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$. Considere el LRT $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$. Demuestre que se rechaza H_0 si

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i > b.$$

EJERCICIO 4. Sea dada una muestra aleatoria $X_1, \dots, X_n$ de una población de Pareto con pdf

$$f(x|\theta, \nu) = \frac{\theta \nu^\theta}{x^{\theta+1}} I_{[\nu, \theta)}(x), \qquad \theta > 0, \quad \nu > 0.$$

(a) Encuentre los MLE de θ y de ν.

(b) Demuestre que el LRT de

$$H_0 : \theta = 1, \nu \text{ desconocido}, \qquad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \neq 1, \nu \text{ desconocido},$$

tiene una región crítica de la forma $\{x : T(x) \leq c_1 \text{ o } T(x) \geq c_2\}$, donde $0 < c_1 < c_2$ y

$$T = \log \left[\frac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{(\text{mín}_i X_i)^n} \right].$$

(c) (opcional) Demuestre que bajo H_0, $2T$ tiene una distribución chi cuadrado con $n-1$ grados de libertad.

Práctico 3 - parte (a)

EJERCICIO 5. Suponga que se dan dos muestras independientes, $X_1, \ldots, X_n$, $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$, y $Y_1, \ldots, Y_m$, $Y_i \sim \text{Exp}(\mu)$.

(a) Encuentre el LRT de $H_0 : \theta = \mu$ vs. $H_1 : \theta \neq \mu$.

(b) Demuestre que el test de la parte (a) se puede basar en el estadístico

$$T = \frac{\sum X_i}{\sum X_i + \sum Y_i}.$$

(c) Demuestre que la distribución de T cuando H_0 es verdadero es Beta(n, m).

EJERCICIO 6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Considere el test $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$.

(a) Si σ^2 es conocido, demuestre que el test que rechaza H_0 cuando

$$\bar{X} > \theta_0 + z_\alpha \sqrt{\sigma^2/n}$$

es un test de tamaño α. Demuestre que el test se puede derivar como un LRT.

(b) Demuestre que el test de la parte (a) es un test UMP.

(c) Si σ^2 es desconocido, demuestre que el test que rechaza H_0 cuando

$$\bar{X} > \theta_0 + t_{n-1,\alpha} \sqrt{S^2/n}$$

es un test de tamaño α. Demuestre que el test se puede derivar como un LRT.

EJERCICIO 7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, donde θ_0 es un valor especificado de θ y σ^2 es desconocido.

Considere el test $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

(a) Demuestre que el test que rechaza H_0 cuando

$$|\bar{X} - \theta_0| > t_{n-1,\alpha/2} \sqrt{S^2/n}$$

es un test de tamaño α.

(b) Demuestre que el test de la parte (a) se puede derivar como un LRT.

EJERCICIO 8. Demuestre que cada una de las familias siguientes tiene un MLR (monotone likelihood ratio).

(a) $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ con σ^2 conocido.

(b) Poisson(θ).

(c) Binomial(n, θ) con n conocido.

EJERCICIO 9. Considere el test de unión-intersección de una distribución normal visto en el teórico. Demuestre que la elección $t_L = -t_U = t_{n-1,\alpha/2}$ da un test con error Tipo I de valor α para todo $\theta \in \Theta_0$.