Ejercicio 7, Práctico 2

Error cuadrático medio

Recordemos la noción de error cuadrático medio (mean squared error, MSE).

Def (MSE). El error cuadrático medio (MSE) de un estimador W de un parámetro θ es la función de θ definida como $E_\theta(W-\theta)^2$.

El MSE nos da una idea de la *calidad* de un estimador. Es decir, el MSE mide el promedio de la diferencia al cuadrado entre el estimador W y el parámetro θ.

Conviene introducir el *bias* de un estimador puntual para darle una interpetación al MSE.

Def. (bias). El bias de un estimador puntual W de un parámetro θ es la diferencia entre el valor esperado de W y de θ. Es decir,

$$Bias_\theta W := E_\theta W - \theta.$$

Nótese que podemos realizar la manipulación siguiente:

$$\begin{aligned} E_\theta(W-\theta)^2 &= E_\theta(W^2) + \theta^2 - 2\theta E_\theta(W) \\ &= (E_\theta(W^2) - (E_\theta(W))^2) + (\theta^2 - 2\theta E_\theta(W) + (E_\theta(W))^2 \\ &= Var_\theta(W) + (Bias_\theta W)^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, el MSE se puede interpretar como la suma de dos términos, el término $Var_\theta(W)$ que mide la precisión (variabilidad del estimador), y el término $Bias_\theta W$ que mide la exactitud (bias).

Estimación Bayesiana

Recordemos la notación utilizada en estimación Bayesiana. Sea $\pi(\theta)$ la distribución a priori del parámetro θ. Sea $f(x|\theta)$ la distribución de la muestra. Notamos con $\pi(\theta|x)$ a la *distribución a posteriori*, es decir, la distribución condicional de θ dado el valor muestral x. Notamos con $m(x)$ a la distribución marginal de X, es decir,

$$m(x) = \int f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta.$$

Nótese que la distribución a posteriori es

$$\pi(\theta|x) = f(x|\theta)\pi(\theta)/m(x).$$

La distribución a posteriori, $\pi(\theta|x)$, se puede utilizar para estudiar el parámetro θ, por ejemplo como estimdor puntual de θ puedo tomar la media de la distribución a posteriori.

Sobre la distribución beta

A continuación hacemos una recapitulacion de la distribución beta. $Beta(\alpha, \beta)$ es una familia de distribuciónes continuas en el intervalo $(0, 1)$, indexada por dos parámetros α y β con pdf

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Aqui $B(\alpha, \beta)$ denota la *función beta*, que se define en forma integral como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Prop. (Relación entre la función beta y la función gamma). Recuerde que la función Gamma (forma integral de Euler) es

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \Re(z) > 0.$$

Se verifica que:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Prueba. Escribimos el producto de dos funciones gamma:

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_{u=0}^\infty e^{-u} u^{x-1} du \cdot \int_{v=0}^\infty e^{-v} v^{x-1} dv \\ &= \int_{v=0}^\infty \int_{u=0}^\infty e^{-v-u} u^{x-1} v^{x-1} du dv.\end{aligned}$$

Consideremos el cambio de variables $u = f(z, t) = zt$ y $v = g(z, t) = z(1-t)$. Entonces $u = zt = vt/(1-t)$. El determinante de la matriz Jacobiana del cambio de variable es:

$$|J(v, z)| = -z.$$

El producto $\Gamma(x)\Gamma(y)$ es

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_{z=0}^\infty \int_{t=0}^1 e^{-z}(zt)^{x-1}(z(1-t))^{y-1} z dt dz \\ &= \int_{z=0}^\infty e^{-z} z^{x+y-1} dz \int_{t=0}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \\ &= \Gamma(x+y) B(x, y).\end{aligned}$$

□

A continuación calculamos los momentos de la distribución beta.

Prop. (Momentos de la distribución beta). Sea n un entero tal que $n > -\alpha$. Entonces:

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)\Gamma(\alpha)}$$

En particular, para $n = 1$ y $n = 2$ tenemos que

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$
$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}.$$

y

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}.$$

Prueba. Por definición,

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^n x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{(\alpha+n)-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\ &= \frac{B(\alpha+n,\beta)}{B(\alpha,\beta)}. \end{aligned}$$

Concluimos utilizando la relación entre la funcion beta y la funcion gamma, $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$. Los casos particulares de valor esperado y varianza se obtienen evaluando la fórmula general en $n = 1$ y $n = 2$, utilizando $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. □

Parte a

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. iiid con distribución $Bernoulli(p)$. Sabemos que la v.a. $Y = \sum_i X_i$ tiene distribución $Binomial(n,p)$.

A continuación para la estimación Bayesiana suponemos (se debe aclarar en la letra) que la ditribucion a priori de p es la distribución $Beta(\alpha,\beta)$. Haremos uso del repaso de las propiedades destacadas de la distribución beta hecho anteriormente.

La probabilidad conjunta de Y y p es igual a la probabilidad condicional por la probabilidad marginal, $f(y|p) \times \pi(p)$,

$$f(y,p) = \left[\binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}\right] \left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}\right]$$
$$= \binom{n}{y} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{y+\alpha-1}(1-p)^{n-y+\beta-1}.$$

Realicemos el cálculo de la distribución marginal de Y

$$f(y) = \int_0^1 f(y,p)dp = \binom{n}{y} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 p^{y+\alpha-1}(1-p)^{n-y+\beta-1}dp$$
$$= \binom{n}{y} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(y+\alpha, n-y+\beta)$$
$$= \binom{n}{y} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n-y+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}.$$

La distribución a posteriori (la distribución de p dado y) es

$$f(p|y) = \frac{f(y,p)}{f(y)} = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n-y+\beta)} p^{y+\alpha-1}(1-p)^{n-y+\beta-1}$$
$$= \frac{1}{B(y+\alpha, n-y+\beta)} p^{y+\alpha-1}(1-p)^{n-y+\beta-1}.$$

Identificamos a esta distribución como la distribución $Beta(y+\alpha, n-y+\beta)$. Recuerde que p es la variable e y se trata como fijo.

Utilizando el estimador para p como el valor medio de la distribución a posteriori, y recordando la fórmula para el valor medio de una distribución beta, tenemos que:

$$\hat{p}_B = \frac{y+\alpha}{\alpha+\beta+n}.$$

Parte b

Sea $Y = \sum_i X_i$.

El MSE del estimador Bayesiano, $\hat{p}_B$, de p, es por definición

$$E_p(\hat{p}_B - p)^2 = Var_p\hat{p}_B + (Bias_p\hat{p}_B)^2$$
$$= Var_p\left(\frac{Y+\alpha}{\alpha+\beta+n}\right) + \left(E_p\left(\frac{Y+\alpha}{\alpha+\beta+n}\right) - p\right)^2.$$

Recordemos que la varianza de una v.a. constante es cero, y que $Var(aX) = a^2 Var(x)$. Recordemos también que la varianza de la suma de v.a. no correlacionadas es la suma de las varianzas, y que si X tiene distribución de Bernoulli de parámetro p, entonces $Var(X) = p(1-p)$. Deducimos que el primer término de la derecha es

$$Var_p\left(\frac{Y+\alpha}{\alpha+\beta+n}\right) = \frac{1}{(\alpha+\beta+n)^2}Var_pY$$
$$\frac{1}{(\alpha+\beta+n)^2}np(1-p).$$

El segundo término de la derecha lo trabajamos de manera análoga, dado que

$$E_p\left(\frac{Y+\alpha}{\alpha+\beta+n}\right) = \frac{np+\alpha}{\alpha+\beta+n}.$$

Obtenemos que el MSE para este estimador Bayesiano es

$$E_p(\hat{p}_B - p)^2 = \frac{np(1-p)}{(\alpha+\beta+n)^2} + \left(\frac{np+\alpha}{\alpha+\beta+n} - p\right)^2.$$

Parte c

Tomamos $\alpha = \beta = \sqrt{n/4}$. Debemos sustituir estos valores en la fórmula de $E_p(\hat{p}_B - p)^2$ hallada en la parte anterior.

Realicemos el algebra con la ayuda de [SageMath](). Se puede evaluar este código en una celda de Sage en el programa online [SageCell]().

```
sage: var('n, p, alpha, beta')
sage: expr = n*p*(1-p)/(alpha + beta + n)^2 + ((n*p + alpha)/(alpha + beta + n
sage: expr(alpha=sqrt(n/4), beta=sqrt(n/4)).simplify_full()

1/4*(n + 2*sqrt(n) + 1)/(n^2 + 4*(n + 1)*sqrt(n) + 6*n + 1)
```

Nótese esta cantidad es independiente del parámetro p, como queriamos probar. De hecho podemos simplificar aún más esta expresión con la ayuda del método `canonicalize_radical`:

```
sage: expr.canonicalize_radical()
1/4/(n + 2*sqrt(n) + 1)
```

que es

$$\frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}.$$

Utilizando estos valores de α y de β, el estimador Bayesiano del parámetro p es

$$\hat{p}_B = \frac{Y+\sqrt{n/4}}{n+\sqrt{n}}.$$

Observación. Cabe preguntarse cómo conocer averiguar desde un principio los valores de α y β necesarios para que el MSE sea constante respcto a p. Con Sage podemos hacer el cálculo siguiente:

```
sage: solve(expr.derivative(p).simplify_full()==0, p)
[p == 1/2*(2*alpha^2 + 2*alpha*beta - n)/(alpha^2 + 2*alpha*beta + beta^2 - n)
```

Este cálculo equivale a hacer $\dfrac{\partial MSE(\hat{p}_B)}{\partial p} = 0$. Aquó `solve` me dice que para que sea cero dicha derivada parcial, preciso que la cantidad $2\alpha^2 + 2\alpha\beta - n$ sea cero. Es fácil ver que esto se cumple eligiendo $\alpha = \beta = \sqrt{n/4}$. Hay otras elecciones posibles, pero la particularidad del caso $\alpha = \beta$ es que la pdf es simétrica respecto a $1/2$.

Comparación entre el MSE obtenido por MLE y por el método Bayesiano

En este ejercicio calculamos la distribución a priori Beta de parámetros $\alpha = \beta = \sqrt{n/4}$. Sea $\hat{p} = \bar{X}$ el MLE asociado a la Bernoulli (este cálculo se realizó en el teórico). El MSE asociado a $\hat{p}$ es

$$E_p(\hat{p} - p)^2 = Var_p\bar{X} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

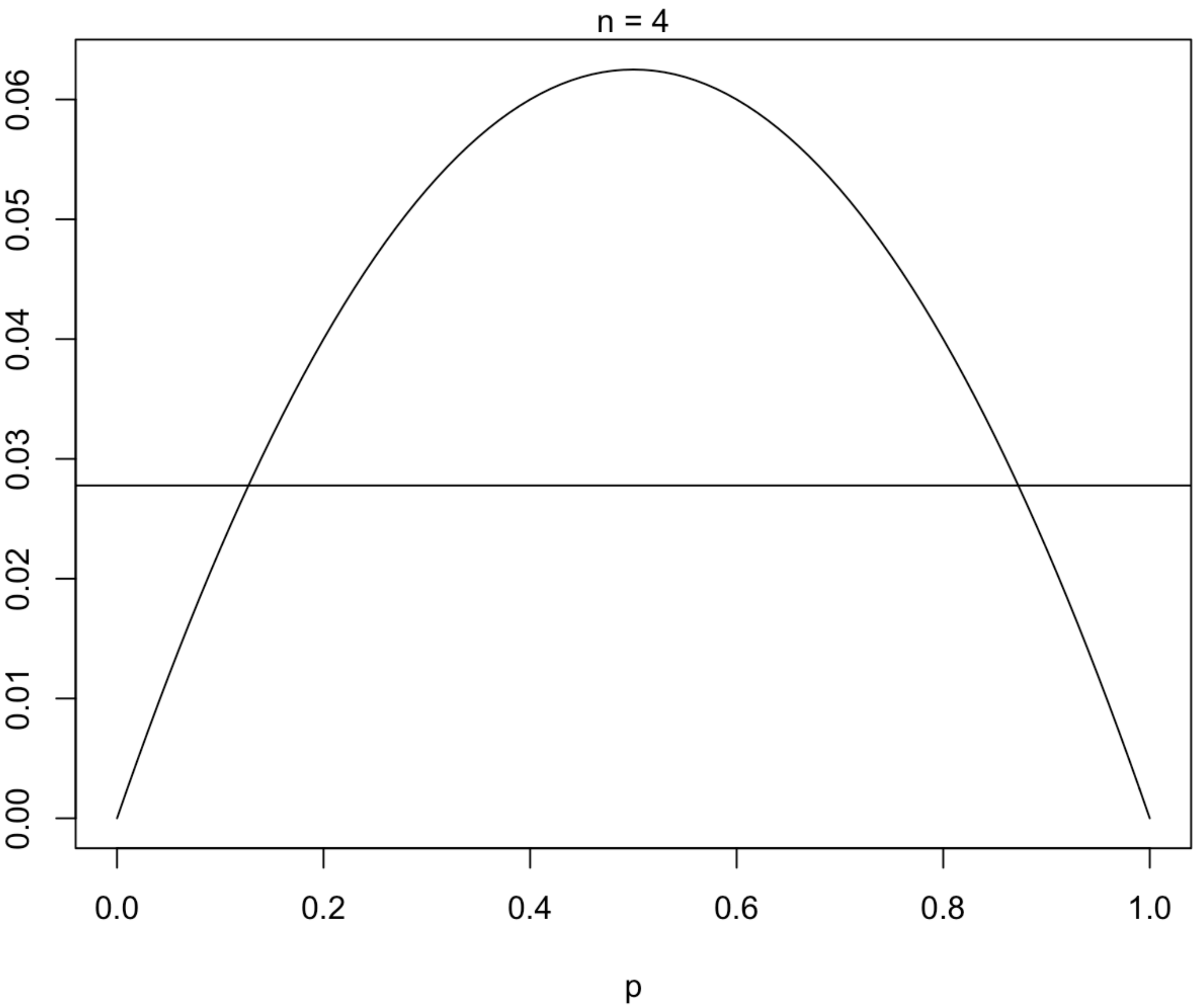
¿Qué estimador conviene mas? Consideremos esta pregunta realizando el gráfico de cada MSE para dos tamaños muestrales distintos.

Primero definimos las funciones en R:

```
MSE_Bayes <- function(n){n / (4*(n+sqrt(n))^2)}
MSE_MLE <- function(n, p){p*(1-p)/n}
```

Para el caso de muestra chica `n=4`:

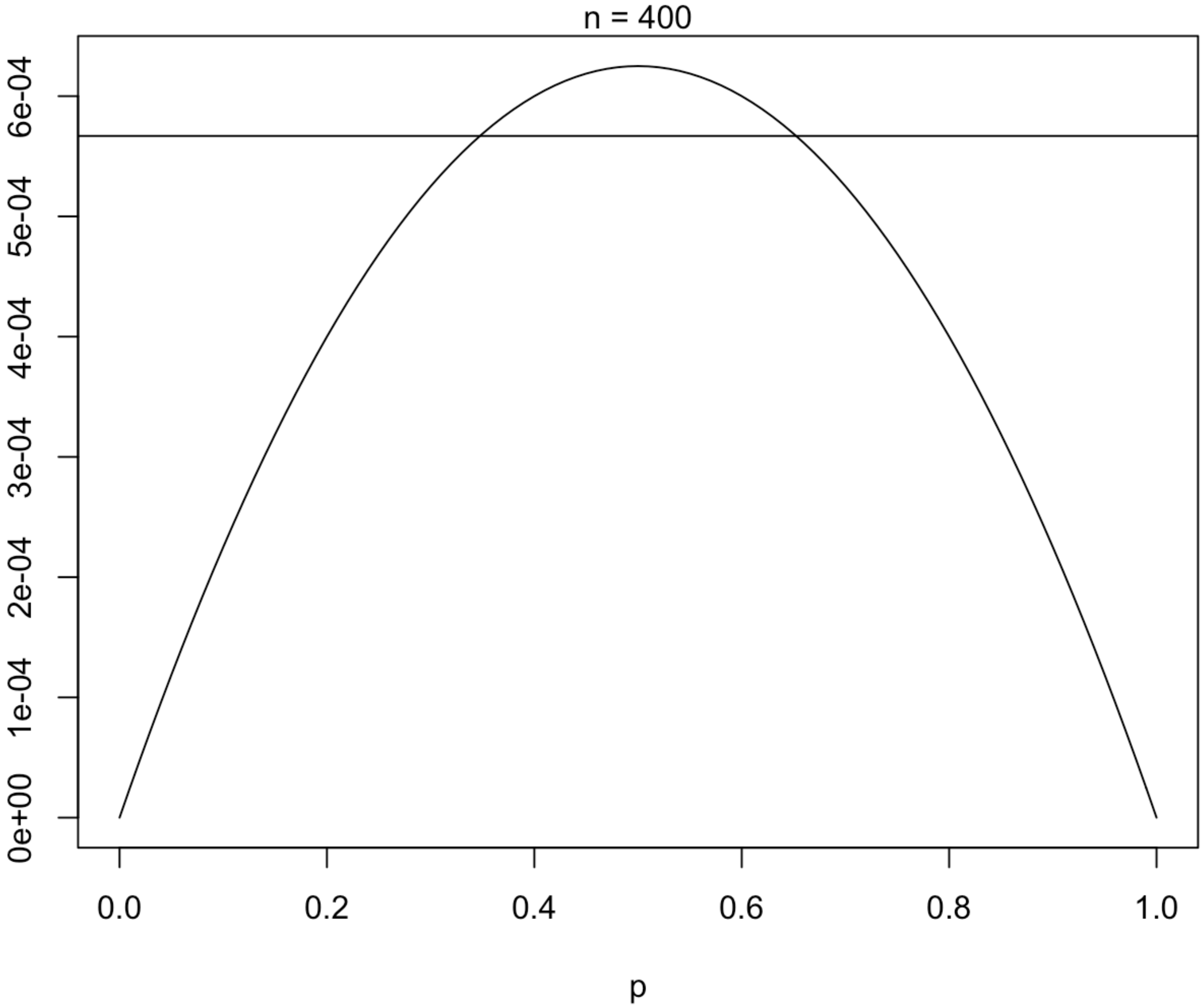
```
# caso muestra chica
n = 4
plot(function(p){MSE_MLE(n, p)}, 0, 1, ylab="", xlab="p")
abline(h = MSE_Bayes(n))
mtext(paste("n =", n))
```



Para valores de n chicos, $\hat{p}_B$ es más conveniente, a menos que tengamos una fuerte sospecha de que el valor de p se encuentra cerca de 0 o de 1.

Para el caso de muestra grande `n=400` :

```
# caso muestra grande
n = 400
plot(function(p){MSE_MLE(n, p)}, 0, 1, ylab="", xlab="p")
abline(h = MSE_Bayes(n))
mtext(paste("n =", n))
```



Para valores de muestra grandes, $\hat{p}$ es en general mejor estimador.

La información que nos da el MSE junto con la información que tengamos del problema nos puede ayudar a decidir cuál estimador tomar para un problema dado.