Practico 1 - Clase 2

Friday, August 31, 2018 9:01 PM

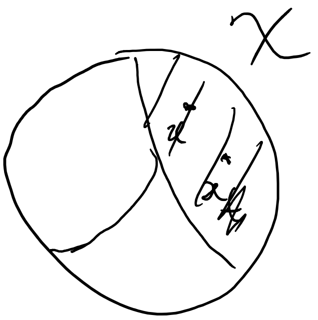
Def/ un estadístico suficiente $T(x)$ se dice minimal si $\forall\ T'(X)$ e.s. $\Rightarrow T(X)$ es función de $T'(X)$.

$$T'(x) = T'(y) \longrightarrow T(x) = T(y)$$

Teorema (19 Teo.): Sea $f(x|\theta)$ la pdf de una muestra X. Supongamos que $\exists\ T(x)$ t.q. para dos muestras x e y, la razón $\frac{f(x|\theta)}{f(y|\theta)}$ es constante como función de θ si y sólo si $T(x) = T(y)$. Entonces $T(x)$ es un estadístico suficiente minimal para θ.

Prueba:

Primero veamos que $T(X)$ es un estadístico suficiente.



$$A_t = \{x : T(x) = t\}$$

$$T(x) = T(x_{T(x)})$$

$$h(x) \equiv \frac{f(x|\theta)}{f(x_{T(x)}|\theta)} \quad : \text{cte como función de } \theta \text{ por (H).}$$

$$g(t|\theta) := f(\boxed{x_t}|\theta)$$

$$f(x|\theta) = \left(f(x_{T(x)}|\theta) \frac{f(x|\theta)}{f(x_{T(x)}|\theta)} \right) = g(T(x)|\theta) \cdot h(x).$$

$\phi(\ldots) = \frac{\ldots}{f(x_{T(x)}|\theta)}$

$\Rightarrow T(x)$ es suficiente por el teorema de factorización.

Falta probar que $T(x)$ es minimal.

Sea $T'(X)$ otro estadístico suficiente.

$\xRightarrow{\text{por T.F.}} \exists\ g', h'$ t.q: $f(x|\theta) = g'(T'(x)|\theta)\cdot h'(X)$.

$\Rightarrow$ Sean x e y t.q. $T'(x) = T'(y)$:

$$\frac{f(x|\theta)}{f(y|\theta)} = \frac{g'(\cancel{T'(x)|\theta})\cdot h'(x)}{g'(\cancel{T'(y)|\theta})\, h'(y)} \overset{\theta}{=} h'(x)/h'(y);$$

como este cociente no depende de $\theta \Rightarrow$ por (H), tenemos que $T(x) = T(y)$. $\Rightarrow T$ es minimal suficiente. $\boxed{M}$

~~Ej.~~

Ej. 8 Pr. 1

(a) $$\frac{f(x|\theta)}{f(y|\theta)} = \frac{\prod_i e^{-(x_i-\theta)^2/2}}{\prod_i e^{-(y_i-\theta)^2/2}} = \frac{e^{-\sum_i (x_i-\theta)^2/2}}{e^{-\frac{1}{2}\sum_i (y_i-\theta)^2}}.$$

$$\sum_i \underbrace{(x_i-\theta)^2}_{x_i^2+\theta^2-2x_i\theta} = \sum_i x_i^2 + \theta^2 n - 2\theta\bar{x}\cdot n$$

$$-\sum_i (x_i-\theta)^2 + \sum_i (y_i-\theta)^2 = \sum_i y_i^2 - x_i^2 + \cancel{\theta^2 n} - \cancel{\theta^2 n}$$
$$-2\theta n\bar{y} + 2\theta n\bar{x}.$$

$$\Rightarrow \frac{f(x|\theta)}{\ldots} = -\frac{1}{2}\left[\sum_i (x_i^2 - y_i^2) + 2\theta n(\bar{x}-\bar{y})\right]$$

$f(y|\theta)$

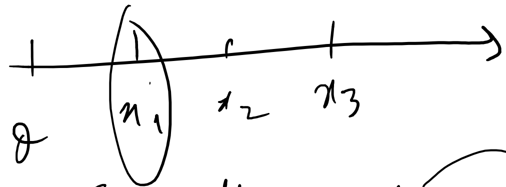
Teo. $\Rightarrow \overline{X}$ es un est. min. suf.

$$\underbrace{\qquad}_{} \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in (\theta, +\infty) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) $$\frac{f(x|\theta)}{f(y|\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \cdot \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} e^{-(y_i-\theta)} \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(y_i)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{n\theta}}}{\cancel{e^{n\theta}}} \cdot e^{-\sum_i x_i + \sum_i y_i} \times \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(y_i)} = *$$

$=$



$$* = e^{-\sum_i x_i + \sum_i y_i} \cdot \frac{\mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(\min_i x_i)}{\mathbb{1}_{(\theta,+\infty)}(\min_i y_i)}.$$

Para que $\frac{f(x|\theta)}{f(y|\theta)}$ sea indep. de θ, preciso que

$\min_i x_i = \min_i y_i \xRightarrow{\text{Teorema 1.19}} T(X) := \min_i X_i$ es un est. minimal suficiente.

Ej. 5

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in (-i(\theta-1), i(\theta+1)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2i\theta} \cdot \overbrace{I(-i(\theta-1) < x_i \leq i(\theta+1))} = *$$

$$-(\theta-1) \le \frac{x_i}{i} \le (\theta+1)$$

$$-(\theta-1) \quad \frac{x_1}{1} \quad \frac{x_2}{2} \quad \frac{x_3}{3} \quad (\theta+1)$$

$$* = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \cdot I\left(-(\theta-1) \le \boxed{\min_i \frac{x_i}{i}}\right) \times I(*)$$

$$\times\, I\left(\boxed{\max_i \frac{x_i}{i}} \le \theta+1\right) \cdot \underbrace{1}_{h(x)}$$

$$g(t|\theta) \cdot h(x)$$

$\Rightarrow$ Por el teo. factorización,

$$T(X) = \left(\min_i \frac{x_i}{i},\ \max_i \frac{x_i}{i}\right)$$

es minimal.

——— x ———