Estadística
CURE

Práctico 1

Curso 2018

EJERCICIO 1. Sea X una observación de una población con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sea $|X|$ la v.a. valor absoluto de X. ¿Es $|X|$ un *estadístico suficiente*?

EJERCICIO 2. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes con densidades

$$f_{X_i}(x|\theta) = \begin{cases} e^{i\theta - x}, & x \geq i\theta \\ 0, & x < i\theta. \end{cases}$$

Probar que $T = \min_i(X_i/i)$ es un estadístico suficiente para θ.

EJERCICIO 3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la función de densidad de probabilidad

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma}, \quad \mu < x < \infty, 0 < \sigma < \infty.$$

Encontrar un estadístico suficiente bidimensional para (μ, σ).

EJERCICIO 4. Probar el siguiente teorema (ver [Teorema 6.2.2, Statistical Inference, Casella & Berger].

Teorema 1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ observaciones i.i.d. de una función de densidad de probabilidad $f(x|\theta)$ que pertenece a una familia exponencial dada por

$$f(x|\theta) = h(x) c(\theta) \exp\left(\sum_{i=1}^{k} w_i(\theta) t_i(x)\right),$$

donde $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$, $d \leq k$.
Entonces

$$T(X) = \left(\sum_{j=1}^{n} t_1(X_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} t_k(X_j)\right)$$

es un estadístico suficiente para θ.

EJERCICIO 5. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes con funciones de densidad de probabilidad

$$f(x_i|\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2i\theta} & -i(\theta - 1) < x_i < i(\theta + 1) \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\theta > 0$. Encontrar un estadístico suficiente bidimensional para θ.

EJERCICIO 6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución Gamma(α, β). Encontrar un estadístico suficiente bidimensional para (α, β).

EJERCICIO 7. Sea $f(x,y|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ la función de densidad de probabilidad bivariada para la distribución uniforme en el rectángulo cuya esquina inferior izquierda es (θ_1,θ_2) y cuya esquina superior derecha es (θ_3,θ_4) en $\mathbb{R}^2$. Supondremos que los parámetros son tales que $\theta_1 < \theta_3$ y $\theta_2 < \theta_4$. Sea $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ una muestra aleatoria con esta distribución. Encontrar un estadístico suficiente cuadridimensional para $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$.

EJERCICIO 8. Para cada una de las distribuciones siguientes, sea $X_1,X_2,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria. Encuentre un estadístico minimal suficiente para θ.

(a) $f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\theta)^2/2}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty,$ (normal)

(b) $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad \theta < x < \infty, -\infty < \theta < \infty,$ (exponencial localizada)

(c) $f(x|\theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{(1+e^{-(x-\theta)})^2}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty,$ (logística)

(d) $f(x|\theta) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty,$ (Cauchy)

(e) $f(x|\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty,$ (exponencial doble)

EJERCICIO 9. Un estadístico auxiliar que resulta natural en muchos problemas de estadística es *el tamaño de la muestra*. Por ejemplo, sea N una variable aleatoria que toma los valores $1,2,\ldots$ con probabilidades conocidas $p_1,p_2,\ldots$, donde $\sum p_i = 1$.

Suponga que usted observa $N=n$, y realiza n experimentos de Bernoulli con probabilidad de éxito θ, obteniendo X éxitos.

(a) Demuestre que el par (X,N) es suficiente minimal y que N es auxiliar para θ.

(b) Demuestre que el estimador X/N no es sesgado para θ y tiene varianza

$$\sigma^2(X/N) = \theta(1-\theta)E(1/N).$$

EJERCICIO 10. Suponga que X_1 y X_2 son observaciones i.i.d. de la función de densidad de probabilidad

$$f(x|\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}e^{-x^\alpha}, \quad x>0, \alpha>0.$$

Demostrar que $(\log X_1)/(\log X_2)$ es un estadístico auxiliar.