SOLUCIÓN EXAMEN 19 DE JULIO, ROCHA

MATEMÁTICA 1 2023 - CURE

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por la fórmula

$$f(x) = (x+2)(x^2+4x+3).$$

(a) Bosquejar el gráfico de la función f.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(-1, f(-1))$.

(c) Hallar una primitva de f.

(d) Calcular el área debajo del gráfico de f entre $x = -1$ y $x = 0$.

2. Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$.

(a) Dibujar la curva de $f(x)$ indicando la intersección con los ejes de coordenadas, puntos crítcos, regiones de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, comportamiento de la función cuando x tiende a más infinito y cuando tiende a menos infinito.

(b) Hallar las primitivas de $f(x)$.

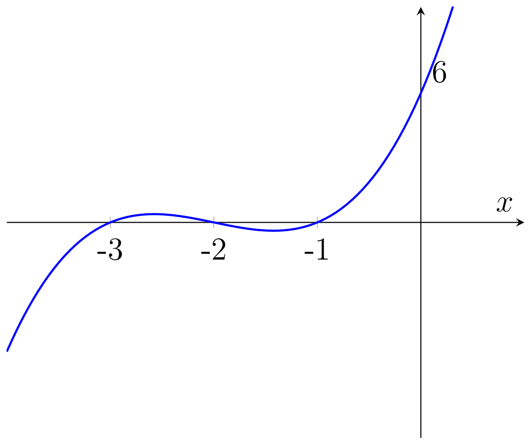
(c) Calcular $\int_0^{\sqrt{e}} f(x)\,dx$.

(d) Hallar $F(x)$ la primitiva de $f(x)$ que verifica que $F(0) = \log 3$.

(e) Hallar las primitivas de $xF(x)$.

Soluciones

Ejercicio 1:(a)

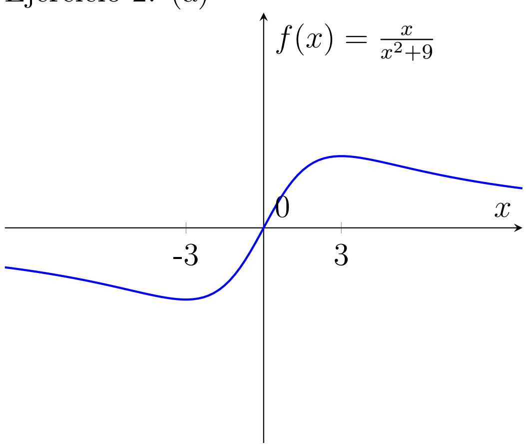


La función corta al eje x en $x = -3$, $x = -2$, y $x = -1$.
El punto de corte con el eje y es $y = 6$.
El máximo local se alcanza en $x = -2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ y su valor es $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

El mínimo local se alcanza en $x = \frac{1}{\sqrt{3}} - 2$ y su valor es $f(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

(b) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 11$, $f(-1) = 0$, $f'(-1) = 2$. Entonces la ecuación de la recta tangente es $y = 2x + 2$.
(c) Para encontrar una primitiva podemos usar el método de sustitución con $u = x^2 + 4x + 3$. Por lo tanto una primitiva de f es $F(x) = \dfrac{(x^2 + 4x + 3)^2}{4}$.
(d) El área debajo del gráfico de f entre $x = -1$ y $x = 0$ es $F(0) - F(-1) = \frac{9}{4}$.

Ejercicio 2: (a)



La función corta al eje y en el punto $(0, 0)$.
Los puntos críticos de la función son $x = -3$ y $x = 3$.
La función crece en el intervalo $(-3 < x < 3)$ y decrece en $x < -3$ y $x > 3$.
La función alcanza un máximo local de $\frac{1}{6}$ en $(x = 3)$ y un mínimo local de $\frac{-1}{6}$ en $(x = -3)$.
f tiene un punto de inflección en $x = 0$.
$f(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a $-\infty$.
(b) Una forma de calcular sus primitivas es multiplicar la función por 2, dividir por 2 y aplicar el método de sustitución con $u = x^2 + 9$. Entonces las primitivas de $f(x)$ son de la forma $\dfrac{\log(x^2+9)}{2} + c$, con c una constante.
(c) Para calcular la integrar tomamos una primitiva cualquiera, por ejemplo $\dfrac{\log(x^2+9)}{2}$ y entonces la integral es igual a $\dfrac{\log((\sqrt{e})^2+9)}{2} - \dfrac{\log(0+9)}{2} = \dfrac{\log(\frac{e+9}{9})}{2}$.
(d) La primitiva es $F(x) = \dfrac{\log(x^2+9)}{2}$.
(e) $xF(x) = \dfrac{x\log(x^2+9)}{2}$. Para calcular sus primitivas podemos hacer sustitución con $u = x^2+9$, entonces nos queda calcular las primitivas de $\dfrac{\log u}{4}$, para ello podemos usar el método de integración por partes, con lo cual nos queda que las primitivas son de la forma $\dfrac{u\log u - u}{4} + c$. Entonces las primitivas de $xF(x)$ son de la forma $\dfrac{(x^2+9)\log(x^2+9) - (x^2+9)}{4} + c$.