Modulación y Procesamiento de Señales
Segundo Parcial 2023

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

5 de julio de 2023

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 2 horas y es de carácter individual.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [10 pts.]

Se trasmite una señal binaria que toma valores -A y A correspondientes a 0 y 1 lógicos independientes entre si y con probabilidad $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ respectivamente. El ruido introducido por el canal se modela como ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\frac{\eta}{2}$. Se modula con pulsos rectangulares de ancho T_b.

(a) Bosquejar la onda conformada para la secuencia 1011.

(b) Hallar la densidad espectral de potencia de la señal modulada.

(c) Explique qué sucede si se conforma con pulsos polares con retorno a cero (RZ); qué beneficios y contras implica esto. Bosqueje, para este caso, la onda conformada por la secuencia 1011.

A partir de ahora considere los siguientes valores: $A = 1$, $\eta = 5 \times 10^{-6}\ W/Hz$ y el filtro de recepción tiene ancho de banda $B_R = 12\ kHz$.

(d) Halle la probabilidad de error para el caso en que el umbral decisión es $V_\gamma = 0$

(e) Halle la probabilidad de error para el caso en que el umbral de decisión es $V_\gamma = -\frac{A}{2}$; explique qué sucede con las probabilidades de error si se manda un dígito u otro.

Problema 2 [10 pts.]

(a) Dibuje el diagrama de un transmisor PCM m-ario y explique la función de cada componente.

(b) Se desea transmitir una señal de voz ($W = 3\ kHz$) mediante un sistema PCM m-ario. Se tiene un ancho de banda disponible de $B_T = 20\ kHz$. Para obtener cierto nivel de fidelidad se desea cuantizar con al menos 200 niveles. Hallar el máximo valor de dígitos, la máxima frecuencia de muestreo y el mínimo m (en ese orden).

(c) Hallar la mínima potencia de transmisión si se desea obtener $SNR_D \geq 36dB$. Asuma que el canal no introduce atenuación, que se está trabajando arriba del umbral de error y que la señal está normalizada ($X_m = 1$).

(d) Dado que $\eta = 1 \times 10^{-6}\ W/Hz$ verifique si efectivamente se está trabajando arriba del umbral de error.

(e) Repita las últimas dos partes si el canal introduce una atenuación en potencia de $L = 2$.

Fórmulas útiles

$$\text{Escalón:} \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\text{Rectángulo:} \quad \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$\text{Triángulo:} \quad \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

$$\text{Coseno:} \quad cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

Función	Transformada de Fourier
$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \mathrm{sinc}(f\tau)$
$r\mathrm{sinc}(rt)$	$\Pi\left(\frac{f}{r}\right)$
$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \mathrm{sinc}^2(f\tau)$
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$x(t)e^{j\Omega_0 t}$	$X[j(\Omega - \Omega_0)]$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left[F(j\Omega) * G(j\Omega)\right]$

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta(f - kr_b)$$

Probabilidad de error de receptor regenerativo binario con umbral de decisión V

$$P_e = P_0\, Q\left(\frac{V - a_0}{\sigma_\eta}\right) + P_1\, Q\left(\frac{a_1 - V}{\sigma_\eta}\right)$$

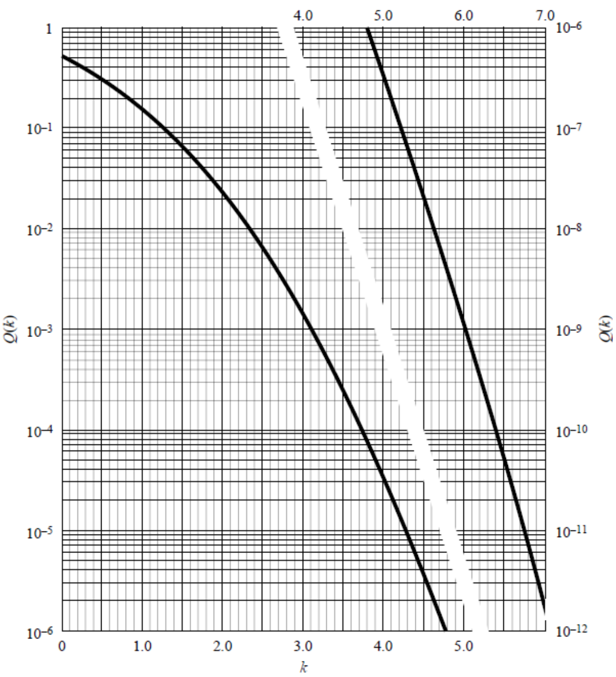
En el caso de señalización M-aria polar, para que $P_e \approx 10^{-5}$, se tiene que cumplir que

$$SNR_R \approx 6(M^2 - 1)$$

Relación señal a ruido en sistema PCM

$$SNR_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1 + 4q^2 P_e}\right)\frac{f_s}{2W}$$

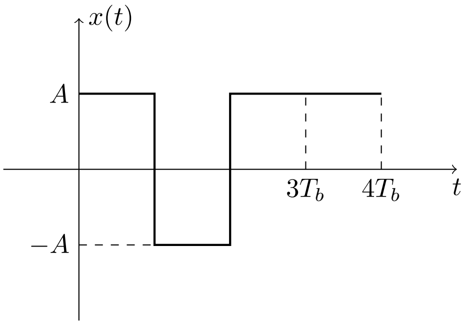
Función $Q(k)$ (cola gaussiana)



Solución

Problema 1

(a) Bosquejo:



(b)

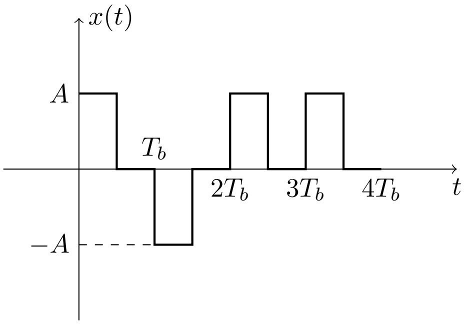
$$\mu_a = -A\frac{1}{4} + A\frac{3}{4} = \frac{A}{2}$$

$$\sigma_a^2 = \left(-A - \frac{A}{2}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(A - \frac{A}{2}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{3}{4}A^2$$

$$|P(f)| = T_b sinc(fT_b)$$

$$G(f) = \frac{A^2}{4}\left[3sinc(fT_b) + \delta(f)\right]$$

(c) Bosquejo:



Cuando se conforma con pulsos rectangulares con retorno a cero, se requiere mayor ancho de banda (los pulsos duran menos tiempo) pero se envía implícitamente una señal de sincronismo y la señal enviada es de menor potencia.

(d)

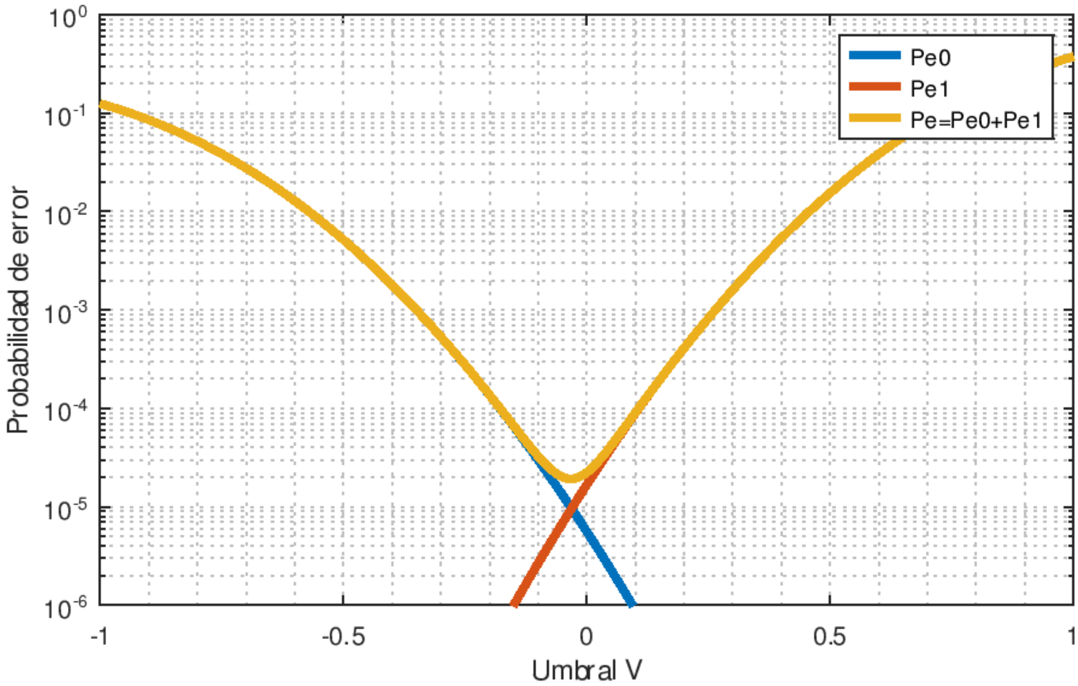
$$P_e = P_0 Q\left(\frac{V - a_0}{\sigma_n}\right) + P_1 Q\left(\frac{a_1 - V}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right) \approx Q(4.1) \approx 2 \times 10^{-5}$$

Donde se tuvo en cuenta la aclaración dada en la instancia de parcial de que σ_n^2 puede aproximarse como ηB_R.

(e)

$$P_e = \frac{1}{4}Q\left(\frac{A/2}{\sigma_n}\right) + \frac{3}{4}Q\left(\frac{3A/2}{\sigma_n}\right) \approx \frac{1}{4} \times 2 \times 10^{-2} + \frac{3}{4} \times 1 \times 10^{-9} \approx 5 \times 10^{-3}$$

En ninguno de los dos casos se encuentra el umbral óptimo. Si bien se sabe que al enviarse unos con mayor probabilidad que ceros, el umbral óptimo se encuentra por debajo del punto medio (en este caso $V = 0$), no se encuentra tan abajo como $-A/2$, dado que para este último caso la probabilidad de error se incrementó. El gráfico siguiente ilustra este efecto, desglosando cada una de las probabildiades, y dejando en evidencia que el mínimo de la probabilidad de error no se encuentra en el punto medio entra $-A$ y A sino más a la izquierda, donde $P_{e0} = P_{e1}$.



Problema 2

(a) Ver teórico.

(b) Capacidad del canal: $nf_s = r \leq 2B_T$
Cantidad de niveles: $m^n \geq 200$
Teorema del Muestreo: $f_s \geq 2W$
Máxima cantidad de dígitos: $n \leq \frac{B_T}{W} = 6.67 \Rightarrow n = 6$
Máxima frecuencia de muestreo: $f_s \leq \frac{B_T}{3} = 6.67\ kHz$
Mínimo m: $m = 2 \Rightarrow 2^6 = 64 < 200$; $m = 3 \Rightarrow 3^6 = 729 > 200$ ($m = 3$).

(c)

$$SNR_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right)\frac{f_s}{2W} \approx \frac{S_x}{X_m^2}3q^2\frac{f_s}{2W}$$

Donde se ha despreciado la probabilidad de error por encontrarse trabajando por encima del umbral. Entonces:

$$10^{3,6} \approx 3981 \leq 3.34 S_x q^2 \Rightarrow S_x q^2 \geq 1192$$

Si $q = 200$ niveles entonces $S_x \geq 30\ mW$, pero con $m = 3$ q puede llegar a ser hasta $3^6 = 729$ niveles entonces $S_x \geq 2,2\ mW$.
Nota: Lo que se calculó acá no es la potencia de transmisión sino la potencia de la señal a digitalizar. Es un error de cómo se construyó la letra. Igual se consideró válido este enfoque.

(d) Potencia de ruido en recepción: $N = \eta B_T = 20\ mW$
Hay que ver si $SNR_R \geq 6(M^2 - 1) = 48$
Nota: Análogamente a la nota de arriba, lo que se tiene aquí no es la potencia de transmisión/recepción sino la potencia de la señal a digitalizar. Si se considera que la potencia de transmisión es igual a la S_x calculada

arriba, entonces en ninguno de los dos casos ($L = 1$ o $L = 2$) se cumple que se está trabajando por encima del umbral.

(e)