# Modulación y Procesamiento de Señales

## Práctico variables aleatorias y procesos estocásticos
*Practico 6*

Cada ejercicio comienza con un smbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ bsico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difcil. Adems puede tener un nmero, como (3.14) que indica el nmero de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd.edition. O tambin de la forma (H3.14) para el libro *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Monson H. Hayes. 2023

### ✦ Ejercicio 1 (8.1-6)

Se considera el experimento de tirar una moneda cargada, donde la probabilidad de obtener cara es $\Pr\{C\} = (1+\epsilon)/2$ con $0 < |\epsilon| < 1$.
Demostrar que la probabilidad de que haya dos resultados iguales con dos lanzamientos independientes será mayor que $1/2$.

### ✦ Ejercicio 2 (8.2-1)

Considere el experimento de transmitir un mensaje de tres dígitos sobre un canal ruidoso. El canal tiene una probabilidad de error por dígito de $P(E) = 2/5 = 0.4$, y se puede asumir independencia entre errores de dígitos diferentes. Tomemos $X$ VA que indica el número de errores con el que se recibe el mensaje.

(a) Encontrar y graficar la función de probabilidad $p_X(x)$

(b) Encontrar y graficar la función de distribución asociada $F_X(x)$.

(c) La probabilidad de recibir al menos dos errores en el mensaje

(d) La probabilidad de recibir más de un error en el mensaje

(e) Encontrar la esperanza $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ y la varianza $\sigma_X^2$.

### ★ Ejercicio 3 (8.3-5)

Sea $X$ VA discreta cuyos posibles valores son los $K$ valores equiprobables,

$$0,\ a,\ 2a,\ 3a...(K-1)a.$$

Encontrar la esperanza $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ y la varianza $\sigma_X^2$.

### ✦ Ejercicio 4 (8.2-2)

Sea $X = \phi$ VA con distribución uniforme ($\phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$), que indica el ángulo de una aguja giratoria.

(a) Graficar la densidad de probabilidad $f_X(x)$

(b) Encontrar y graficar la función de distribución asociada $F_X(x)$

(c) Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

$$\text{(i) } \pi < X \leq 3\pi/2, \quad \text{(ii) } X \geq 3\pi/2 \quad \text{(iii) } X \leq \pi \quad \text{(iv) } |X - m_X| < 2\sigma_X$$

(d) Encontrar la esperanza $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ y la varianza $\sigma_X^2$.

## ⋆Ejercicio 5 (8.4-11)

Sea $X$ VA gaussiana con media $\mu = 10$ y varianza $\sigma^2 = 400$, $Q(k)$ la cola gaussiana,

$$Q(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

(a) Encontrar las siguientes probabilidades en función de $Q(k)$

$$\text{(a)}\Pr\{X < 2\mu\} \quad \text{(b)}\Pr\{\mu < X \leq 2\mu\} \quad \text{(c)}\Pr\{0 < X \leq 2\mu\} \quad \text{(d)}\Pr\{X > 0\}$$

## ✦Ejercicio 6 (H3.14)

Para cada uno de los siguientes procesos encontrar si son estacionarios en sentido amplio.

(a) $x(t) = A\,cos(\omega_0 t)$, donde $A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A)$

(b) $x(t) = A\,cos(\omega_0 t + \phi)$, donde $\phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$

## ⋆Ejercicio 7

Para cada uno de los siguientes proceso calcular su media, potencia, varianza y autocorrelación. En el caso que corresponda encontrar su densidad espectral de potencia.

(a) $x_1[n]$ secuencia IID que toma los valores 1 y -1 con probabilidad 1/2.

(b) $x_2[n]$ secuencia IID que toma el valor 1 con probabilidad $p$ y -1 con probabilidad $1 - p$.

(c) $x_3[n]$ secuencia IID con distribución uniforme $x_3[n] \sim U\left[\frac{-\triangle}{2}, \frac{\triangle}{2}\right]$.

(d) $x_4[n]$ secuencia IID con distribución normal $x_4[n] \sim N(0, \sigma)$

(e) $x_5[n] = x_1[n]u[n]$

(f) $x_6(t)_\omega = \alpha(\omega)$, es decir, una constante que depende del esperimento. $\alpha \sim N(0, 1)$

## ✦Ejercicio 8 (2.84)

Sea $e[n]$ señal característica de ruido blanco y $s[n]$ otra señal estacionaria independiente de $e[n]$. Mostrar que la señal $y[n] = s[n]e[n]$ también es ruido blanco, o sea que $E\{y[n]y[n+m]\} = A\delta[m]$ donde $A$ es una constante.

## ⋆Ejercicio 9 (4.48)

Considerar un proceso aleatorio en tiempo continuo $x_c(t)$, con densidad espectral de potencia $G_{x_c}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_0}\right)$. Suponga que se muestrea $x_c(t)$, resulta la secuencia de variables aleatorias $x[n] = x_c(nT)$.

(a) ¿Cuál es la autocorrelación del proceso en tiempo discreto?

(b) ¿Como debería elegirse $T$ para que el proceso en tiempo discreto sea blanco, es decir para que la densidad espectral de potencia sea constante para todo $\theta$?

(c) Si la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo es ahora $G_{x_c}(f) = \triangle\left(\frac{f}{f_0}\right)$, ¿cómo debería elegirse $T$ para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

(d) ¿Qué requerimiento general deben cumplir el proceso continuo y el periodo de muestreo para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

## ⋆Ejercicio 10 (2.85)

Sea $x[n]$ un proceso real estacionario con características de ruido blanco, de media nula y varianza $\sigma_x^2$. Sea $y[n]$ la salida cuando $x[n]$ es la entrada a un sistema lineal e invariante en el tiempo, de respuesta al impulso $h[n]$. Mostrar que:

(a) $\mathbb{E}\{x[n]y[n]\} = h[0]\sigma_x^2$.

(b) $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2[n]$.

## ⋆ Ejercicio 11

Sea $v(t)$ un proceso estacionario y $z(t) = v(t) + v(t + T_d)$, con $T_d$ constante. Hallar $R_z(\tau)$ y $G_z(f)$, conocidos $R_v(\tau)$ y $G_v(f)$.

## ⋆ Ejercicio 12

Considerar un proceso estocástico $y[n]$, que es la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo, de transferencia

$$H(e^{j\omega}) = \left[1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right]^{-1}$$

La entrada $x[n]$ es un proceso estacionario con características de ruido blanco, de media nula y $\mathbb{E}\left\{x^2[n]\right\} = \sigma_x^2$.

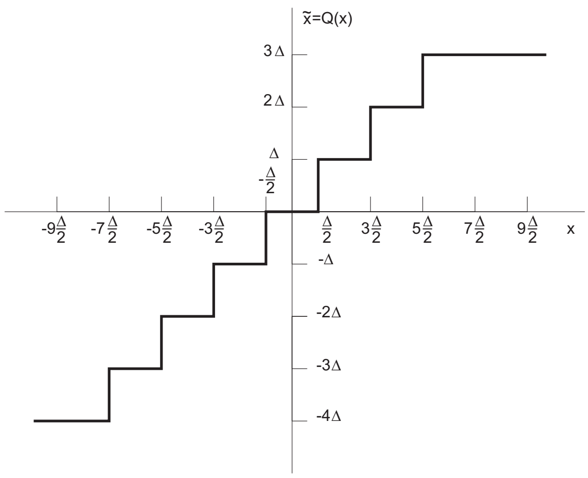
(a) Expresar $E[y^2[n]]$ en función de $R_y[n]$ o $G_y(e^{j\omega})$.

(b) Determinar $G_y(e^{j\omega})$, la densidad espectral de potencia de $y[n]$.

(c) Determinar $R_y[n]$, la función de autocorrelación de $y[n]$.

## ⋆ Ejercicio 13 (4.57)

Para poder procesar secuencias en computadora o DSP's, debemos cuantificar la secuencia en un conjunto de valores discretos. Este proceso puede expresarse en términos del pasaje de la secuencia de entrada $x[n]$ por un cuantificador $Q(x)$ (por redondeo en este caso) cuya relación entrada-salida se ve en la figura.




Si el intervalo de cuantización $\Delta$ es pequeño comparado con los cambios en el nivel de la señal de entrada, podemos asumir que la salida del cuantificador es de la forma

$$y[n] = x[n] + e[n]$$

Donde $e[n] = Q(x[n]) - x[n]$ puede considerarse como un proceso estocástico, de muestras independientes, independiente de la señal y con distribución de probabilidad uniforme en $(-\Delta/2, \Delta/2)$.

Aceptemos que la señal $x$ tiene una autocorrelación de la forma:

$$R_x[n] = \delta[n] + 1/2(\delta[n-1] + \delta[n+1]).$$

Esto puede corresponder (por ejemplo) al muestreo de una señal binaria.

(a) Hallar la media, la varianza, y la autocorrelación de la secuencia $e[n]$.

(b) Hallar la relación señal/ruido de cuantificación.

(c) La señal se pasa ahora por un *derivador* discreto cuya ecuación de recurrencia es

$$y[n] = \frac{1}{T}(x[n] - x[n-1])$$

Hallar la relación señal ruido a la salida.

(d) Repetir la parte (c) con el *derivador*:

$$y[n] + y[n-1] = \frac{2}{T}(x[n] - x[n-1])$$

# Solución

## Ejercicio 1

La probabilidad de que haya dos resultados iguales en dos lanzamientos es la probabilidad de obtener cara-cara o número-número.

$$P(CC \cup NN) = P(CC) + P(NN) = (\frac{1+\epsilon}{2})^2 + (\frac{1-\epsilon}{2})^2 = \frac{1+\epsilon^2}{2}$$

## Ejercicio 2

**(a)** X puede tomar los valores $0, 1, 2, 3$

$$P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$P(X=1) = 3\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$P(X=2) = 3\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$P(X=3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$P(X=2)$ se hallaa calculando la probabilidad de tener un acierto y dos errores multiplicado por la cantidad de formas de ordenar los dígitos. Análogo $P(X=1)$

**(b)**

$$F_X(x) = \sum_i P(X=i)$$

**(c)** Es la probabilidad de recibir dos errores más la probabilidad de recibir tres errores.

**(d)** Es la probabilidad de recibir dos errores más la probabilidad de recibir tres errores.

**(e)**

$$E[X] = 1P(1) + 2P(2) + 3P(3) =$$

$$E[X^2] = 1P(1) + 4P(2) + 9P(3) =$$

$$var(X) = 1P(1) + 4P(2) + 9P(3) - E^2[X] =$$

## Ejercicio 3

Como son equiprobables: $P_X(x) = \frac{1}{k}$

$$E[X] = \frac{a}{k} + \frac{2a}{k} + ... + \frac{(k-1)a}{k} = \frac{a}{k}\sum_{n=1}^{k-1} n = \frac{a}{k}\frac{k(k-1)}{2} = \frac{a(k-1)}{2}$$

$$E[X^2] = \frac{a^2}{k}\sum_{n=1}^{k-1} n^2 = \frac{a^2}{k}\frac{k(k-1)(2k-1)}{6} = \frac{a^2(k-1)(2k-1)}{6}$$

$$var(X) = E[X^2] - E^2[X] =$$

## Ejercicio 4

**(a)** Es la pdf de una uniforme

**(b)** Es la cdf de una uniforme

**(c)** La probabilidad de que X pertenezca a un intervalo es el largo del intervalo dividido $2\pi$ (en este caso).

**(d)**

$$E[X] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx$$

**(a)** Por definición se tiene que,
$\Pr(X > m + k\sigma) = \Pr(X \leq m - k\sigma) = Q(k)$
$\Pr(m < X \leq m + k\sigma) = \Pr(m - k\sigma < X \leq m) = \frac{1}{2} - Q(k)$
$\Pr(|X - m| > k\sigma) = 2Q(k)$
$\Pr(|X - m| \leq k\sigma) = 1 - 2Q(k)$
Se tiene que $\mu = 10$ y $\sigma = 20$.
(a) $\Pr(X < 20) = \Pr(X < \mu + k\sigma)$ donde $k = 1/2$, obteniendo por lo tanto

$$\Pr(X < 20) = 1 - Q\,(k = 1/2)$$

(b)

$$\Pr(10 < X \leq 20) = 1/2 - Q\,(k = 1/2)$$

(c)

$$\Pr(0 < X \leq 20) = 2\Pr(10 < X \leq 20) = 2\,(1/2 - Q\,(k = 1/2))$$

(d)

$$\Pr(X > 0) = 1 - \Pr(X \leq 10 - (1/2) * 20) = 1 - Q\,(k = 1/2)$$

## Ejercicio 6

**(a)** Para que sea WSS tiene que tener media constante, la autocorrelación debe depender de la diferencia de tiempos y potencia finita. Diapositiva 47 de la presentación del curso.

**(b)** Diapositivas 42, 43 y 44 de la presentación del curso.

## Ejercicio 7

**(a)**

$$E[X] = -1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 0$$

$$E[X^2] = (-1)^2\frac{1}{2} + 1^2\frac{1}{2} = 1$$

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 1$$

$$r[n, n+m] = E[X[n]X[n+m]] = E[X[n]]E[X[n+m]] = 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

$$r[n, n+m] = E[X[n]x[n+m]] = E[X^2[n]] = 1 \Leftrightarrow m = 0$$

Donde se usa que el valor que toma X para una muestra n es independiente del que toma para otra muestra distinta n+m. Entonces:

$$r[n, n+m] = \delta[m]$$
$$G_x(f) = 1$$

**(b)**

$$E[X] = -1(1-p) + 1p = -1 + 2p$$

$$E[X^2] = (-1)^2(1-p) + 1^2 p = 1$$

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 2 + 4p + 4p^2$$

$$r[n, n+m] = E[X[n]X[n+m]] = E[X[n]]E[X[n+m]] = 1 + 4p + 4p^2 \Leftrightarrow m \neq 0$$

$$r[n, n+m] = E[X[n]x[n+m]] = E[X^2[n]] = 1 \Leftrightarrow m = 0$$

Donde se usa que el valor que toma X para una muestra n es independiente del que toma para otra muestra distinta n+m.

$$G_x(f) =$$

**(c)**

$$E[X] = \sum_{i=-\frac{\triangle}{2}}^{\frac{\triangle}{2}} i\frac{1}{\triangle} = 0$$

$$E[X^2] = \sum_{i=-\frac{\triangle}{2}}^{\frac{\triangle}{2}} i^2\frac{1}{\triangle} = 2\sum_{i=0}^{\frac{\triangle}{2}} i^2\frac{1}{\triangle}$$

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$r[n, n+m] = E[X[n]X[n+m]] = E[X[n]]E[X[n+m]] = 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

$$r[n, n+m] = E[X[n]x[n+m]] = E[X^2[n]] = P_x \Leftrightarrow m = 0$$

Donde se usa que el valor que toma X para una muestra n es independiente del que toma para otra muestra distinta n+m. Entonces:

$$r[n, n+m] = P_x\delta[m]$$
$$G_x(f) = P_x$$

**(e)**

**(f)**

## Ejercicio 8

Según la definición de $y[n]$ tenemos que:

$$E\left\{y[n]y[n+m]\right\} = E\left\{s[n]e[n]s[n+m]e[n+m]\right\}$$

Y por independencia entre $s$ y$e$ tenemos que,

$$E\left\{s[n]e[n]s[n+m]e[n+m]\right\} = E\left\{s[n]s[n+m]\right\}E\left\{e[n]e[n+m]\right\}$$

Como $e[n]$ tiene características de ruido blanco y $s$ es estacionaria:

$$E\left\{y[n]y[n+m]\right\} = R_s[m].B\delta[n] = A\delta[n]$$

## Ejercicio 9

**(a)** La autocorrelación del proceso $x[n]$ es:

$$R_x[n,m] = E\left\{x[n]x[m]\right\} = E\left\{x_c(nT)x_c(mT)\right\}$$

En la letra se da la densidad espectral de potencia, la que puede existir sólo si el proceso es estacionario en sentido amplio. Entonces:

$$R_x[n,m] = R_{x_c}(nT,mT) = R_{x_c}((n-m)T)$$

Por lo tanto el proceso en tiempo discreto también es estacionario en sentido amplio, y entonces tenemos

$$R_x[k] = R_{x_c}(kT)$$

**(b)** Calculemos primero la autocorrelación del proceso en tiempo continuo

$$R_{x_c}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\Pi\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2f_0 sinc(2f_0t) = \frac{2f_0 sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} = \frac{sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}$$

Entonces

$$R_x[k] = R_{x_c}(kT) = \frac{sin(2\pi f_0 kT)}{\pi kT}$$

Para que sea ruido blanco, debe cumplirse que: $R_x[k] = A\delta[k]$, es decir que $R_x[k] = 0$ si $k \neq 0$, entonces hay que encontrar los valores de $T$ para los que

$$\forall k \neq 0, \exists l \in \mathbb{Z}/2\pi f_0 kT = l\pi$$

entonces

$$2f_0kT \in \mathbb{Z}\ \forall k \Longrightarrow 2f_0T \in \mathbb{Z}$$

Finalmente $T$ es de la forma:

$$T = \frac{m}{2f_0},\ \text{con } m \in \mathbb{Z}$$

**(c)** Calculemos primero la autocorrelación del proceso en tiempo continuo.

$$R_{x_c}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\wedge\left(\frac{f}{f_0}\right)\right\} = f_0 sinc^2(f_0t) = f_0\frac{sin^2(\pi f_0 t)}{\pi^2 f_0^2 t^2} = \frac{sin^2(\pi f_0 t)}{\pi^2 f_0 t^2}$$

Razonando en forma análoga que en la parte anterior:

$$T = \frac{m}{f_0},\ \text{con } m \in \mathbb{Z}$$

**(d)** El proceso en tiempo continuo $x_c(t)$ debe ser estacionario en sentido amplio, tener una autocorrelación no nula en cero y anularse en puntos de la forma $kT\ \forall k \neq 0$ y algún $T$. El periodo de muestreo debe ser cualquiera de los $T$ que cumplen la condición anterior.

## Ejercicio 10

**(a)** Planteando la esperanza pedida:

$$\mathbb{E}\left\{x[n]y[n]\right\} = \mathbb{E}\left\{x[n]\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]\right\}$$

Aplicando linealidad de la esperanza y que $x[n]$ no depende de $k$,

$$\mathbb{E}\left\{x[n]y[n]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left\{x[n]x[k]h[n-k]\right\}$$

$h[n-k]$ es determinista, por lo que aplicando linealidad nuevamente,

$$\mathbb{E}\left\{x[n]y[n]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left\{x[n]x[k]\right\}h[n-k]$$

Y como por letra tenemos que $x[n]$ tiene características de ruido blanco,

$$\mathbb{E}\left\{x[n]y[n]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_x^2\delta[n-k]h[n-k] = h[0]\sigma_x^2$$

**(b)** Sabemos que $G_y = |H|^2 G_x$ y como $x$ es ruido blanco, $G_x = \sigma_x^2$ por lo tanto

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta})|^2 d\theta = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2[k]$$

Donde la última igualdad se obtiene por Parseval.

## Ejercicio 11

Planteando la autocorrelación de $z(t)$,

$$R_z(t,s) = \mathbb{E}\left\{z(t)z(s)\right\} = \mathbb{E}\left\{[v(t)+v(t-T_d)]\,[v(s)+v(s-T_d)]\right\}$$

$$R_z(t,s) = \mathbb{E}\left\{v(t)v(s)+v(t)v(s-T_d)+v(t-T_d)v(s)+v(t-T_d)v(s-T_d)\right\}$$

$$R_z(\tau) = 2R_v(\tau) + R_v(\tau+T_d) + R_v(\tau-T_d)$$

Planteando la densidad espectral de potencia de $z(t)$,

$$G_z(f) = \mathcal{F}\left\{R_z(\tau)\right\} = G_v(f)\left[2 + e^{-j2\pi f T_d} + e^{j2\pi f T_d}\right]$$

$$G_z(f) = 2G_v(f)\left[1 + cos(2\pi f T_d)\right]$$

## Ejercicio 12

**(a)** Aplicando la definición de autocorrelación,

$$\mathbb{E}\left\{y^2[n]\right\} = R_y[0]$$

**(b)** Como el sistema es SLIT, la densidad espectral de potencia de la salida es:

$$G_y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 G_x(e^{j\omega}) = \sigma_x^2\left|1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right|^{-2} = \frac{\sigma_x^2}{\frac{5}{4} - cos(\omega)}$$

**(c)** Podemos partir directamente de

$$G_y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 . G_x(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}).H^*(e^{j\omega}).G_x(e^{j\omega})$$

$$G_y(e^{j\omega}) = \left[\frac{1}{1-\frac{e^{-j\omega}}{2}}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{e^{j\omega}}{2}}\right]\sigma_x^2$$

Al antitransformar obtenemos la autocorrelación,

$$R_y[n] = \sigma_x^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right] * \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n]\right]$$

Si operamos,

$$R_y[n] = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k]\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} u[-k]$$

$$R_y[n] = \sigma_x^2\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=max\{0,-n\}}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

Para $n < 0$ esto es:

$$\sigma_x^2\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{3}\sigma_x^2 2^{-n}$$

Con $n \geq 0$ tenemos,

$$\sigma_x^2\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-n}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \sigma_x^2\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\sum_{k=-n}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right] = \sigma_x^2\left[\frac{(1/4)^{-n} - 1/4}{1 - 1/4} + \frac{4}{3}\right] = \frac{4}{3}\sigma_x^2 2^n$$

Finalmente,

$$R_y[n] = \frac{4}{3}\sigma_x^2 2^{-|n|}$$

## Ejercicio 13

**(a)** Teniendo la densidad de probabilidad del error, calculamos la media como

$$m_e = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x \frac{1}{\Delta} dx$$

$$m_e = \frac{1}{\Delta} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = 0$$

La varianza, que es igual a la potencia, es entonces:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 \frac{1}{\Delta} dx$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\Delta} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\Delta^3}{2^3 3} - \frac{-\Delta^3}{2^3 3} \right) = \frac{\Delta^2}{12}$$

Como se conoce que es no correlacionado muestra a muestra, la autocorrelación del ruido es entonces:

$$R_e[n] = \sigma_e^2 \delta[n] = \frac{\Delta^2}{12} \delta[n]$$

**(b)** La potencia de la señal la podemos calcular evaluando la autocorrelación en 0.

$$S_x = 1$$

La SNR es entonces:

$$SNR = \frac{1}{\frac{\Delta^2}{12}} = \frac{12}{\Delta^2}$$

**(c)** Como el sistema es lineal, el ruido es independiente de la señal y tiene media nula, puedo analizar las potencias de señal y ruido por separado:

$$R_y[0] = E\{y^2[n]\} = E\{\frac{1}{T^2}(x[n] - x[n-1])^2\} =$$

$$= \frac{1}{T^2} E\{(x^2[n] - 2x[n]x[n-1] + x^2[n-1])\} = \frac{1}{T^2}(2R_x[0] - 2R_x[1]) = \frac{1}{T^2}(2-1) = \frac{1}{T^2}$$

$$R_e[0] = E\{e^2[n]\} = E\{\frac{1}{T^2}(e[n] - e[n-1])^2\} =$$

$$= \frac{1}{T^2} E\{(e^2[n] - 2e[n]e[n-1] + e^2[n-1])\} = \frac{1}{T^2}(2R_e[0] - 2R_e[1]) = 2\frac{1}{T^2}\frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{T^2}\frac{\Delta^2}{6}$$

La SNR es entonces:

$$SNR = \frac{1}{\frac{\Delta^2}{6}} = \frac{6}{\Delta^2}$$

La relación señal a ruido empeora respesto a la relación señal a ruido de la entrada. Esto es lógico ya que el ruido es no correlacionado y por lo tanto tiene componentes de alta frecuencia que son las más amplificadas por el derivador. Vale la pena observar que esto no es una deficiencia de la implementación de este filtro, sino que esto ocurre por estar implementando un derivador. En particular si bien esta implementación del derivador usado no es una aproximación muy buena, su reacción frente al ruido es mejor que la de un *derivador perfecto*.

**(d)** Si calculamos la respuesta de este filtro utilizando transformada Z:

$$Y(z) + Y(z)z^{-1} = \frac{2}{T}(X(z) - X(z)z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Este filtro tiene un polo en la circunferencia unidad. Esto hace que no se pueda encontrar una implementación estable de este filtro. Si bien se podría plantear la relación señal a ruido en la salida, no tiene sentido considerar el sistema como derivador ya que la salida no tendrá nada que ver con la derivada de la entrada sino que será básicamente una oscilación correspondientes a la frecuencia angular $\pi$ que es donde está el polo.