PRIMER PARCIAL – MALDONADO

MATEMÁTICA 1 2023 - CURE

1. (40 pts.) Calcular las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cos(x)}}$.

b) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{\operatorname{sen}(x)}$.

c) $h(x) = x^3 + \tan(2x^2)$.

Solución. Escribamos $f(x) = (2\cos x)^{-1/2}$. De forma que $f = f_2 \circ f_1$ donde $f_1(x) = 2\cos x$ y $f_2(y) = y^{-1/2}$. Como $f_1'(x) = -2\operatorname{sen} x$ y $f_2'(y) = \frac{-1}{2} y^{-3/2}$ tenemos

$$f'(x) = f_1'(x) f_2'(f(x)) = -2\operatorname{sen} x \cdot \frac{-1}{2}(2\cos x)^{-3/2} = \frac{\operatorname{sen} x}{(2\cos x)^{3/2}}.$$

Usando la fórmula de la derivada de un cociente

$$g'(x) = \frac{2x\operatorname{sen} x - (x^2+1)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$h'(x) = 3x^2 + 4x\frac{1}{\cos^2(2x^2)} = 3x^2 + 4x(\tan^2(2x^2) + 1).$$

□

2. (30 pts.) Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (x^3+1)^2.$$

a) Calcular $f(\cos(2\pi))$.

b) Hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto $(\cos(2\pi), f(\cos(2\pi)))$.

Solución. $\cos(2\pi) = 1$, así que $f(1) = 4$.

$f'(x) = 3x^2 2(x^3+1) = 6x^2(x^3+1)$, por lo que $f'(1) = 12$. La recta es $y = 12x + b$, y como $f(1) = 12\cdot 1 + b$, tenemos $4 = 12 + b$ y $b = -8$. □

Fecha: 19 de mayo, 2023.

3. (30 pts.) Sea $g\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(y) = e^{y \log y}$$

y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y positiva. Consideramos la función

$$h(x) = g(f(x)).$$

a) Explicar por qué es h derivable.

b) Si $f(1) = 0$ y $f'(1) = 1$, hallar $h'(1)$.

Solución. h es derivable pues es composición de funciones derivables. Derivando g

$$g'(y) = (\log y + 1)e^{y \log y}$$

de modo que

$$h'(1) = f'(1)g'(f(1)) = g'(0) = 2e^0 = 2.$$

$\square$