HOJA 3

MATEMÁTICA 1 2023 - CURE

1. Determinar los intervalos en que son crecientes y decrecientes cada una de las siguientes funciones:
a) $x^3 + 1$.
b) $x^2 - x + 5$.
c) $x^4 - 3x^2 + 1$.
d) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
e) $\operatorname{sen} 2x$.

2. Supongamos que hay una función f tal que $f(x) \neq 0$ para todo x y además $f'(x) = f(x)$. Sea g una función cualquiera tal que $g'(x) = g(x)$. Demostrar que existe una constante c tal que $g(x) = c.f(x)$. (Sugerencia: derivar el cociente g/f.)

3. Para cada una de las siguientes funciones hallar el máximo y mínimo de las siguentes funciones en el intervalo dado.
a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$, en $[0, 4]$.
b) $f(x) = 3x - x^3$, en $[-2, \sqrt{3}]$.
c) $f(x) = x^{\frac{2}{5}} + 1$, en $[-1, 1]$.
d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, en $[0, \sqrt{8}]$.

4. Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo (a, b). Supongamos que $g'(x) < f'(x)$ para todo x en este intervalo y que existe un número c en este intervalo tal que $f(c) = g(c)$. Demostrar que si x es un punto en el intervalo, entonces $g(x) < f(x)$ si $c < x$ y $f(x) < g(x)$ si $x < c$.

5. Una caja con su parte superior abierta ha de tener la base cuadrada y una superficie constante C. Determinar los lados de la caja si el volumen ha de ser máximo.

6. Hallar las coordenadas de los puntos de la curva $y^2 = x+1$ que están más próximos al origen.

7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Demostar que f es constante.

8. Estamos regando el prado y dirigiendo la manguera hacia arriba con un ángulo de inclinación igual a θ. Sea r el rango de la manguera, es decir, la distancia desde la manguera hasta el punto de impacto del agua. Entonces r está dado por la fórmula $r = \dfrac{2v^2}{g} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, donde v y g son constantes.¿Cuál es el ángulo que hace máximo al rango?