Modulación y Procesamiento de Señales
Primer Parcial 2023

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

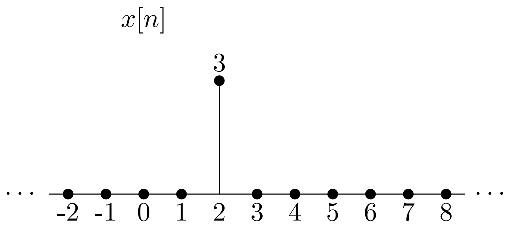
9 de mayo de 2023

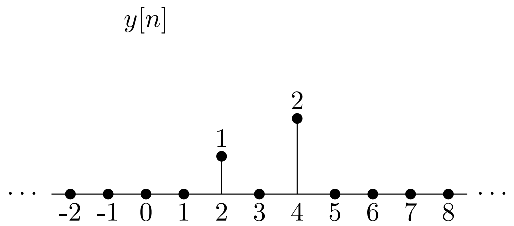
Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y es de carácter individual.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [15 pts.]

A un sistema S, lineal e invariante en el tiempo, se le ingresó una entrada $x[n]$ y su salida resultó ser $y[n]$:





(a) Justifique por qué es posible hallar la respuesta al impulso a partir de los datos brindados.

(b) Halle la respuesta al impulso.

(c) Halle la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$.

(d) Bosqueje módulo y fase de la respuesta en frecuencia indicando ordenadas y abscisas de interés.

Nota: Puede ser útil plantear un diagrama en el plano complejo.

(e) Halle la salida para la entrada $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

Problema 2 [15 pts.]

Dada la siguiente transformada Z:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+2}{2\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

(a) Realice un diagrama de polos y ceros indicando las posibles regiones de convergencia e indiciando cuál/es corresponde/n a un sistema estable y cuál/es corresponde/n a un sistema causal.

Se trabajará con el caso estable y causal:

(b) Halle la respuesta al impulso del sistema y verifique, a partir de ésta, que se trata de un sistema causal y estable BIBO.

(c) Halle la entrada $x[n]$ para tener la siguiente salida:

$$y[n] = \left[3\left(\frac{-1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]$$

(d) Halle la ecuación en recurrencia que caracteriza el sistema.

(e) Realice un diagrama de bloques del sistema, utilizando la mínima cantidad posible de retardos.

Solución

Problema 1

(a) Dado que el sistema es lineal e invariante en el tiempo, la misma transformación que lleva $x[n]$ a $\delta[n]$ se aplica a $y[n]$ para obtener $h[n]$.

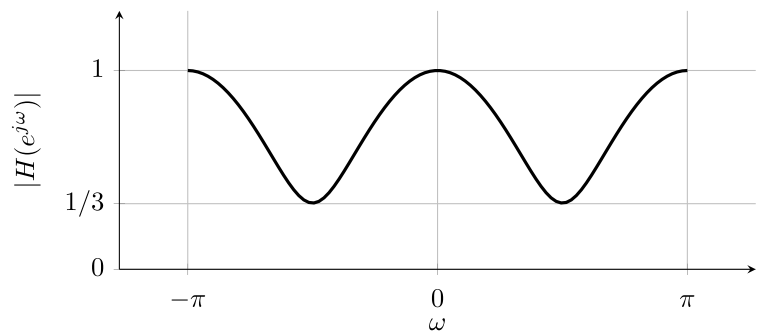
(b)

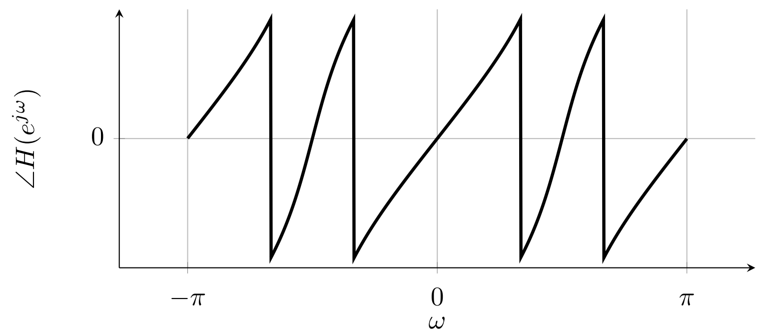
$$x[n] = 3\delta[n-2]$$
$$y[n] = \delta[n-2] + 2\delta[n-4]$$
$$\delta[n] = \frac{1}{3}x[n+2] \Longrightarrow h[n] = \frac{1}{3}y[n+2] = \frac{1}{3}\delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-2]$$

(c)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}\left(1 + 2e^{2j\omega}\right)$$

(d)





(e) La respuesta en frecuencia evaluada en $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{3}(1-2) = -\frac{1}{3}$$

Entonces la salida correspondiente a dicha entrada es

$$y[n] = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Problema 2

(a)

- $\text{RoC}_0: \quad |z| < \frac{1}{4}$
- $\text{RoC}_1: \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$
- $\text{RoC}_2: \quad \frac{1}{2} < |z|$

(b) Haciendo fracciones simples se tiene que

$$\frac{z+2}{2(z+\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\left(\frac{-\frac{7}{3}}{z+\frac{1}{4}} + \frac{\frac{10}{3}}{z-\frac{1}{2}}\right)$$

Antitransformando se obtiene:

$$h[n] = \frac{1}{2}\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]u[n-1]$$

(c)

$$y[n] = 3\left(\frac{-1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$Y(z) = \frac{3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = X(z)H(z)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow X(z) &= \frac{6(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{z^{-1}(1+2z^{-1})} - \frac{2(1+\frac{1}{4}z^{-1})}{z^{-1}(1+2z^{-1})} \\
&= \frac{4-\frac{7}{2}z^{-1}}{z^{-1}(1+2z^{-1}} \\
&= \frac{4}{1+2z^{-1}}z - \frac{\frac{7}{2}}{1+2z^{-1}}
\end{aligned}$$

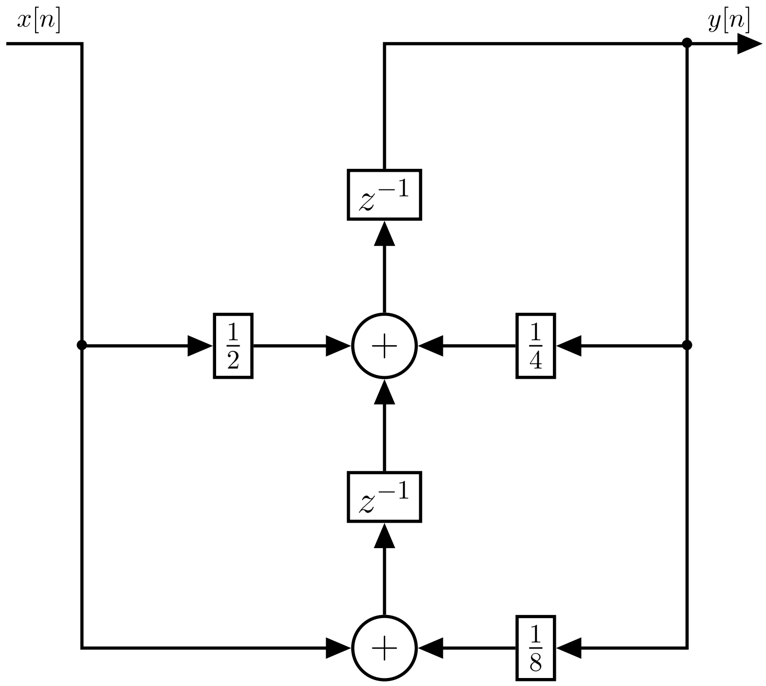
(d)

$$2Y(z)(z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{2}z-\frac{1}{8} = X(z)(z+2)$$

$$2y[n+2] - \frac{1}{2}y[n+1] - \frac{1}{4}y[n] = x[n+1] + 2x[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-2] + \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2]$$

(e)


$x[n]$
$y[n]$
z^{-1}
$\frac{1}{2}$
$+$
$\frac{1}{4}$
z^{-1}
$+$
$\frac{1}{8}$