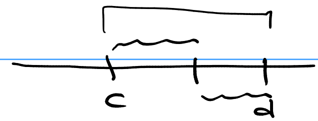
La vez pasada • dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, si existe una forma de asignar

a cada $[c,d]\subset[a,b]$ un número $I_c^d(f)\in\mathbb{R}$ cumpliendo:

- si $m\le f(x)\le M$ para $x\in[c,d] \Rightarrow m(d-c)\le I_c^d(f)\le M(d-c)$

- si $x\in[c,d] \Rightarrow I_c^x(f)+I_x^d(f) = I_c^d(f)$



Entonces los $I_c^d(f)$ son únicos. Los llamamos $\int_c^d f$.

Después veremos que $\int_c^d f$ existe.

- F es una <u>primitiva</u> de f si $F'=f$. Si F y G son primitivas de f $\Rightarrow$ $F-G$ es constante.

- Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces $F(x)=\int_a^x f$ es una primitiva de f.

- Si F es una primitiva de f, entonces $\int_c^d f = F(d)-F(c)$ $\left(= F\Big|_c^d\right)$

Propiedades de las integrales

Proposición Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ (intervalo), continuas, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(2) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$

(3) Si $f(x) \geq 0$ para todo x $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.

(4) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$

(5) $\displaystyle\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

(6) $\displaystyle\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.

dem Como f y g continuas, tienen primitiva $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ etc.

Sean F y G primitivas de f y g respectivamente.

(1) $(F+G)' = F' + G' = f+g \Rightarrow F+G$ es primitiva de $f+g$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b (f+g) = (F+G)(b) - (F+G)(a)$

$\displaystyle = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

(2) $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f \Rightarrow$ λF primitiva de λf. $\Rightarrow$ $\int_a^b \lambda f = (\lambda F)(b) - (\lambda F)(a)$

$= \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda (F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f$.

(3) Sabemos que si $m \leq f(x) \ \forall x \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f$.

Por hipótesis $0 \leq f(x) \ \forall x \Rightarrow 0 = 0 \cdot (b-a) \leq \int_a^b f$.

(4) $f(x) \leq g(x) \ \forall x. \iff g(x) - f(x) \geq 0 \ \forall x \overset{(3)}{\Rightarrow} \int_a^b (g-f) \geq 0$

$$0 \leq \int_a^b \underset{\substack{\| \\ g+(-f)}}{(g-f)} \overset{(1)}{=} \int_a^b g + \int_a^b -f \underset{\lambda=-1}{\overset{(2)}{=}} \int_a^b g + (-1) \int_a^b f = \int_a^b g - \int_a^b f$$

$\Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(5) $|f|(x) = |f(x)|$ por definición

$f(x) \leq |f(x)|$ o sea $f \leq |f|$.

$|f|$ es la composición de la función f (continua) y $|\cdot|$ (continua) $\Rightarrow$ $|f|$ es continua.

$\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. $(*)$

· Si $\int_a^b f \geq 0$, tenemos $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ ✓

· Si $\int_a^b f < 0$, tenemos $\left|\int_a^b f\right| = -\int_a^b f \underset{(2)}{=} \int_a^b -f \underset{\text{aplicado a }(-f)}{\overset{}{\underset{(*)}{\leq}}} \int_a^b |-f| = \int_a^b |f|$. ✓

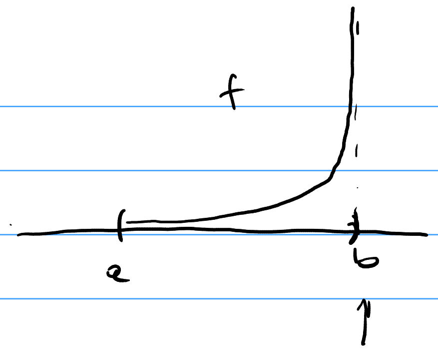
6) $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ es una de las propiedades que le pedimos a la integral. Ya veremos que existe $\int_a^b f$ cumpliendo esto.

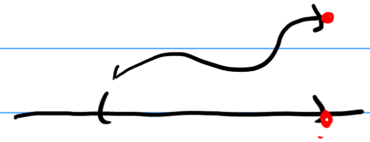
Lema Si $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ es continua. Son equivalentes. 1) $\exists\, g:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(x) = f(x)$ si $x \in (a,b)$

2) existen $\lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$.

dem 1) → 2) Si existe g, $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) \underset{g\text{ cont.}}{=} g(b)$.

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = g(a)$



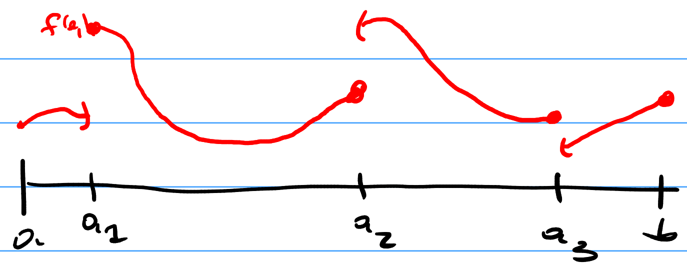


21 → 11   no lo hacemos.

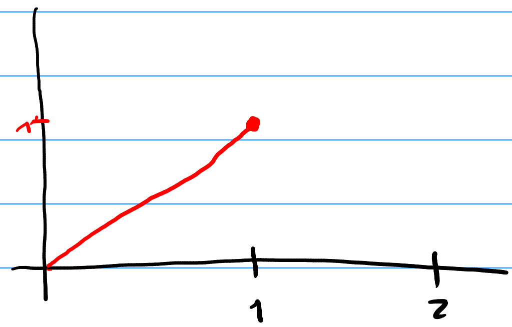
Def Una función $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ es continua a trozos si existen

$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ de forma que   cada $f|_{(a_i,a_{i+1})} : (a_i,a_{i+1}) \to \mathbb{R}$

tiene una extensión continua a todo $[a_i,a_{i+1}]$.



Ej $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 3 & x \in (1,2] \end{cases}$



Def Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua a trozos, y $a = a_0 < a_1 < \dots a_n = b$

es una partición de $[a,b]$ donde $f|_{(a_i, a_{i+1})}$ tiene una extensión continua

$g_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$, definimos

$$\int_a^b f = \int_{a=a_0}^{a_1} g_1 + \int_{a_1}^{a_2} g_2 + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n = b} g_n .$$

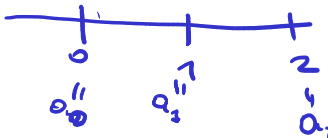
(como los g_i son continuas en $[a_i, a_{i+1}]$, $\int_{a_i}^{a_{i+1}} g$ ya las tenemos definidas)

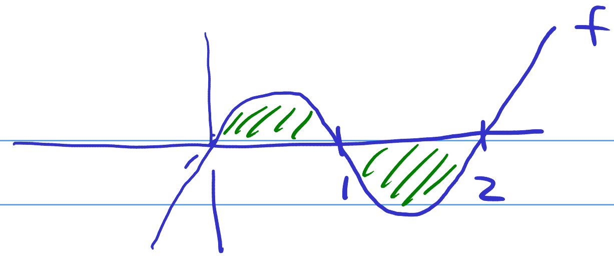
Ej Continuamos con el ejemplo.

$f|_{(0,1)}$ tiene extensión continua a $[0,1]$ $f|_{[0,1]}$ porque f es continua en $[0,1]$.

$f|_{(1,2)}$ es constante 3. $\Rightarrow$ $g(x) = 3$ es extensión continua de $f|_{(1,2)}$ a todo $[1,2]$

$$\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 3 = \int_0^1 x\,dx + \int_1^3 3\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 3x\Big|_1^3 = \frac{1}{2} + 9 - 3$$
$$= \frac{1}{2} + 6 .$$

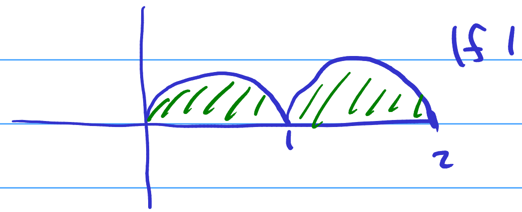




Ej: $f(x) = x(x-1)(x-2)$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Queremos calcular el área verde.

$$= \int_0^2 |f|.$$



$$|f|(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\ [0,1] \\ -f(x) & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

$$f(x) = (x^2-x)(x-2) = x^3-3x^2+2x$$

$$\int_0^1 |f| = \int_0^1 f = \int_0^1 x^3 dx - 3\int_0^1 x^2 dx + 2\int_0^1 x dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - 3\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - 3\,\frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\int_1^2 |f| = \int_1^2 -f = -\int_1^2 f = -\left(\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 - \cancel{3}\,\frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_1^2 + \cancel{2}\,\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_1^2 \right)$$

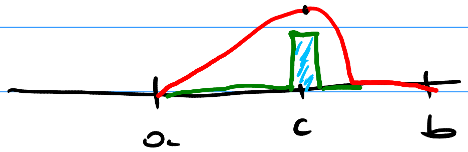
$$= -\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} - \left(8 - \cancel{1}\right) + \left(4 - \cancel{1}\right) \right) = -\left(\frac{15}{4} - 4 \right)$$

$$= -\left(\frac{15}{4} - 4\right) = -\left(\frac{15}{4} - \frac{16}{4}\right) = -\left(-\frac{1}{4}\right) = 1/4.$$

Así que $\int_0^2 |f| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Proposición Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $f(x) \geq 0 \ \forall x$.
Si $f(c) > 0$ para algún $c \Rightarrow \int_a^b f > 0$

dem



$g \leq f$ y $\int_a^b g$ = área del rectángulo > 0.

$$0 < \int_a^b g \leq \int_a^b f.$$

Como f continua, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

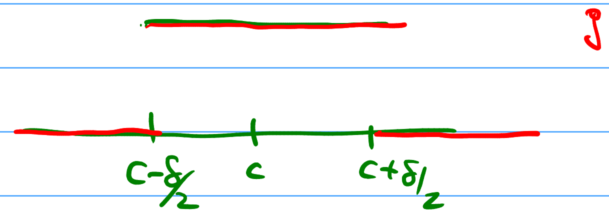
Para $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$. $\Rightarrow \exists \delta > 0$ si $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(c)}{2} = f(c) - \frac{f(c)}{2} \leq f(x) \leq \underbrace{f(c) + \frac{f(c)}{2}}_{\text{no me importa}}$$

$f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$ en $x \in (c-\delta, c+\delta)$. En particular vale en $x \in [c-\frac{\delta}{2}, c+\frac{\delta}{2}]$

Definimos $g(x) = \begin{cases} f(c)/2 & \text{si } x \in [c-\frac{\delta}{2}, c+\delta] \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$



g es continua a trozos.

$$\int_a^b g = \underbrace{\int_a^{c-\delta/2} \underset{0}{\underset{\parallel}{g}}}_{=0} + \int_{c-\frac{\delta}{2}}^{c+\delta/2} \overset{f(c)/2}{g} + \underbrace{\int_{c+\frac{\delta}{2}}^{b} \underset{0}{\underset{\parallel}{g}}}_{=0}$$

$$= \frac{f(c)}{2} \int_{c-\frac{\delta}{2}}^{c+\delta/2} 1\, dx = \frac{f(c)}{2}\, x \Big|_{c-\delta/2}^{c+\delta/2} = \frac{f(c)}{2} \cdot \delta > 0$$

$$\int_a^b f = \int_a^{c-\delta/2} \underset{0}{\underset{\geq}{f}} + \int_{c-\delta/2}^{c+\delta/2} \underset{g}{\underset{\geq}{f}} + \int_{c+\delta/2}^{b} \underset{0}{\underset{\geq}{f}} \geq \int_a^b g > 0$$