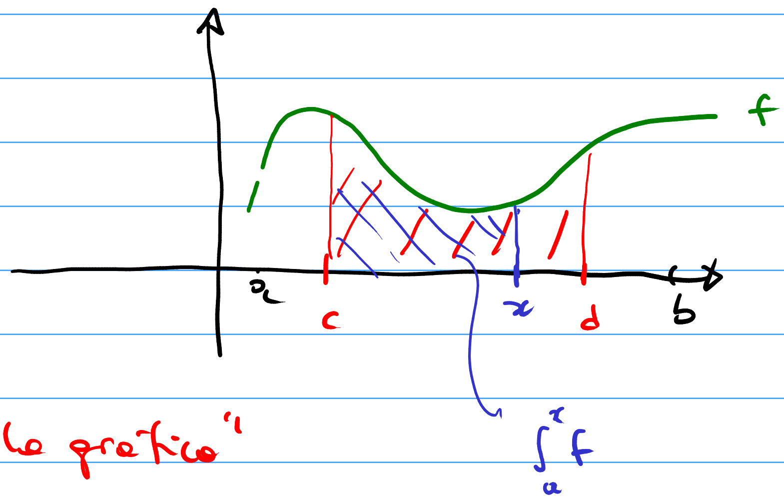
Integrales

La "idea"

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$f \geq 0$

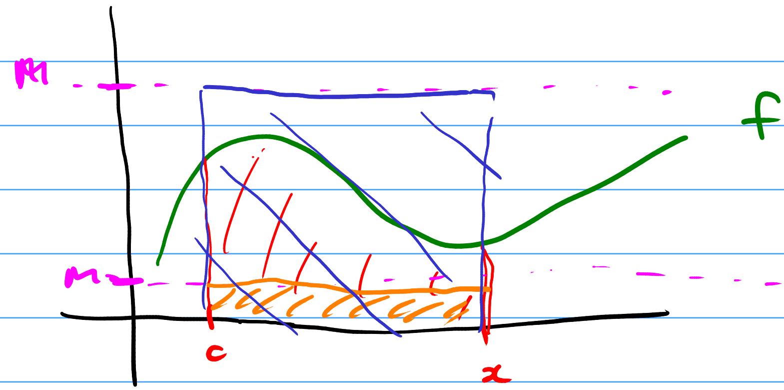


$\int_c^d f$ = "área debajo de la gráfica"

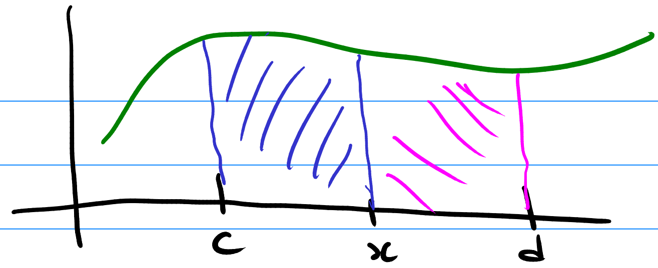
Para cada x tengo un número $\int_c^x f$. La función $F(x) = \int_c^x f$ tiene que cumplir

1) si $m \leq f(y) \leq M \quad \forall y \in [c,x]$

$$m(x-c) \leq \int_c^x f \leq M(x-c)$$



2) $\int_c^d f = \int_c^x f + \int_x^d f$



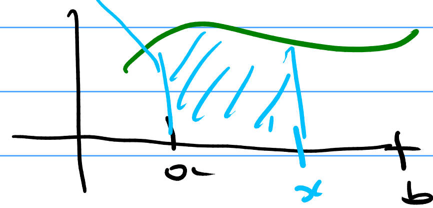
Teo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Supongamos que existe una forma de asignar a cada $c,d\in\mathbb{R}$, $a\leq c<d\leq b$ un número $I_c^d(f)\in\mathbb{R}$ que cumple:

(1) si $m\leq f(x)\leq M$ $\forall x\in[c,d]\Rightarrow$ $m(d-c)\leq I_c^d(f)\leq M(d-c)$

(2) si $c\leq x\leq d\Rightarrow$ $I_c^d(f) = I_c^x(f)+I_x^d(f)$

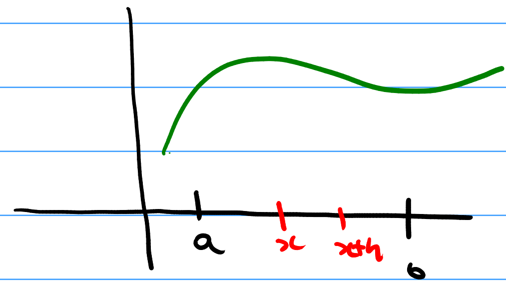
Entonces la función $F(x) = I_a^x(f)$, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

es derivable y $F'=f$



Idea de la prueba

Supongamos que $a \le x < b$ y $h > 0$ y $\underbrace{x+h<b}_{h<b-x}$



$$F(x+h) - F(x) = I_a^{x+h}(f) - I_a^{x}(f)$$

$$\overset{(?)}{=} \cancel{I_a^{x}(f)} + I_x^{x+h}(f) - \cancel{I_a^{x}(f)}$$

$$= I_x^{x+h}(f).$$

Sea $m(h)$ = mínimo de f en $[x, x+h]$ (existe pues f es continua)

$M(h)$ = máximo . . . .

Por (1) $\quad m(h)\underbrace{(x+h-x)}_{h} \le I_x^{x+h}(f) \le M(h)\underbrace{(x+h-x)}_{h}$

Entonces $\quad \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{I_x^{x+h}(f)}{h}$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow h\to 0 \\ f(x)}}{m(h)} \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{M(h)}$$

Como f es continua, cuando $h \to 0$ $m(h) \to f(x)$

$\circledast$

cuando $h \to 0$, $x+h \to x$ o sea $[x, x+h]$ se hace chico y $m(h)$ se acerca a $f(x)$

$$\to \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} f(x) \qquad (\text{pues } h>0)$$

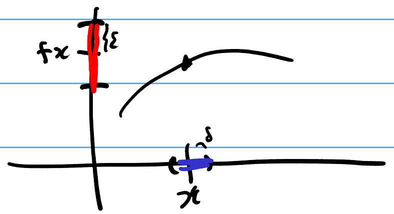
Si $h<0$ se hace igual y tenemos $\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}}_{F'(x)} = f(x)$.

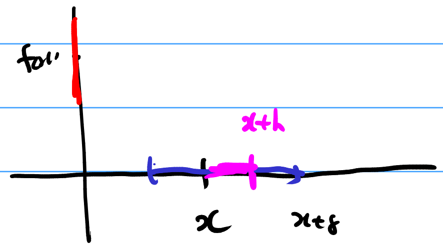
$\circledast$ Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tq si $y \in (x-\delta, x+\delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
pues f es continua.

$\Rightarrow$ si $h < \delta$, todos los $y \in [x, x+h]$ cumplen $y \in (x-\delta, x+\delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

En particular $|f(x) - m(h)| < \varepsilon$ $\rightsquigarrow$ $m(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$

$|f(x) - M(h)| < \varepsilon$ $\rightsquigarrow$ $M(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$





$[x, x+h]$

Def una primitiva de f es una función F tal que $F' = f$.

A veces se anota $\int f$ a una primitiva.

Obs Si F y G son primitivas de f $\Rightarrow$ F y G difieren en una constante.

O sea $F(x) - G(x)$ es constante.

$$(F-G)'(x) = (F'-G')(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ $F - G$ es constante.

Obs Si F y G son primitivas de f que coinciden en un punto $\Rightarrow$ $F = G$.

$F - G = K$ constante

$F(a) = G(a)$ en algún a.

$\Rightarrow$ $0 = F(a) - G(a) = K$

$\Rightarrow$ $F - G = 0$ o sea $F = G$

Teo Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, existen los números $I_c^d(f)$ como en el teo anterior.

Se escribe $\int_c^d f = I_c^d(f)$;

y $F(x) = \int_a^x f$ es primitiva de f.

Después veremos cómo se muestra la existencia.

Obs $\int_c^c f = 0$ pues por la condición (1)

$\left[\text{si } m \le f(x) \le M \;,\; x \in [c,d] \Rightarrow m(d-c) \le \int_c^d f \le M(d-c) \right]$

$d=c$ y $[c,d]$ es un solo punto, y $d-c=0$ así que $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{m \cdot 0}} \le \int_c^c f \le \underset{0}{\underset{\shortparallel}{M \cdot 0}}$.

Def si $x < c$: $\int_c^x f = - \underbrace{\int_x^c f}$

Lema Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y G es una primitiva de f,

entonces $\int_c^d f = G(d) - G(c)$. $\left(\quad G\Big|_c^d \quad \right)$

dem Sabemos que $F(x) = \int_a^x f$ es primitiva de f.

$\Rightarrow$ $F - G$ es constante. $F(x) - G(x) = K$.

$K = F(a) - G(a) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{obs} \\ \text{anterior}}}{=} 0 - G(a)$ $\Rightarrow$ $F(x) = G(x) - G(a)$

$$\int_c^d f = \int_a^d f - \int_a^c f = F(d) - F(c) = (G(d) - G(a)) - (G(c) - G(a))$$
$$= G(d) - G(c).$$

Ej: $\int_1^x x^3\,dx$ $\quad f(x) = x^3 \rightsquigarrow F(x) = \frac{x^4}{4}$ es una primitiva.

$$\int_1^x x^3\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$$

Es

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \log(x)\Big|_1^2 = \log(2) - \underbrace{\log(1)}_{=0} = \log 2$$

Es

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \underbrace{\text{sen}\left(\pi/2\right)}_{=1} - \underbrace{\text{sen}\left(-\pi/2\right)}_{=-1} = 2$$