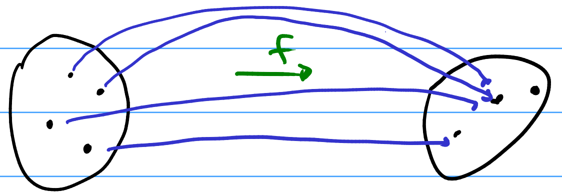
Estamos viendo funciones inversas.



I, J intervalos de $\mathbb{R}$

$f: I \to J$ función.

Una inversa de f es $g: J \to I$

tal que:

$$\underbrace{I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} I}_{id} \qquad g f(x) = x \ \forall x \in I$$

$$\underbrace{J \xrightarrow{g} I \xrightarrow{f} J}_{id} \qquad f g(y) = y \ \forall y \in J.$$

- La inversa es única.
- f invertible $\Leftrightarrow$ f biyectiva.

biyectiva = $\begin{cases} \text{sobreyectiva} \\ + \\ \text{inyectiva} \end{cases}$ $\begin{array}{l} \rightsquigarrow \ \forall y \in J \ \exists x \in I \text{ con } f(x) = y \\ \\ \rightsquigarrow \ \text{si } f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \end{array}$

Ej $f(x) = x$. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$. Es inyectiva.

No es sobreyectiva: su imagen es $f([0,1]) = [0,1]$

Podemos considerar a f como una función $[0,1] \longrightarrow [0,1]$.

Vista así, f es sobre y por lo tanto biyectiva.

Ej $f(x) = x^2$, $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ No es sobre.

pero si la pensamos como $[0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, ahí es biyectiva

La inversa es la raíz cuadrada.

Vimos que si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, es continua, la imagen de f

$f([a,b])$ es un intervalo.

O sea si $a \leq x < x' \leq b$ y α cumple $f(x) \leq \alpha \leq f(x')$ si $f(x) \leq f(x')$.

$f(x') \leq \alpha \leq f(x)$ si $f(x') \leq f(x)$

$\Rightarrow$ $\alpha = f(c)$ para algún c, $x \leq c \leq x'$.

__Vimos:__ Si f es continua y estrictamente creciente $f: [a,b] \to [f(a), f(b)]$ entonces tiene inversa $[f(a), f(b)] \to [a,b]$.

f creciente $\Rightarrow$ $f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$

por el teo de arriba $f([a,b])$ es un intervalo que contiene a $f(a)$ y $f(b)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f([a,b]) \supset [f(a), f(b)]$

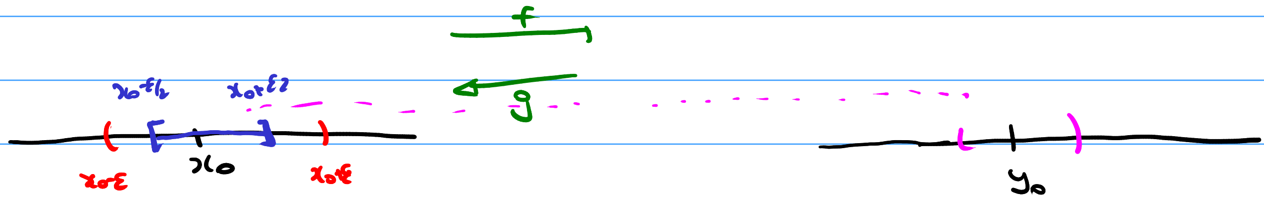
$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ $\Rightarrow$ f sobreyectiva.

f inyectiva: $x \neq x' \Rightarrow \begin{cases} x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \\ x' < x \Rightarrow f(x') < f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Derivada de la función inversa

Proposición $f:[a,b]\to[c,d]$ invertible, creciente y continua.
Entonces $f^{-1}:[c,d]\to[c,d]$ es continua.

dem



Llamemos $g=f^{-1}$.

$y_0\in(c,d)$, $x_0=g(y_0)$

Dado $\varepsilon>0$ queremos $\delta>0$ tal que $g((y_0-\delta,y_0+\delta))\subset(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

$$f\left[x_0-\tfrac{\varepsilon}{2}, x_0+\tfrac{\varepsilon}{2}\right] \underset{\substack{f \text{ cont.} \\ \text{y creciente}}}{=} \left[f\left(x_0-\tfrac{\varepsilon}{2}\right), f\left(x_0+\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right] \ni f(x_0)=fg(y_0)=y_0$$

Tomamos cualquier $\delta>0$ con
$(y_0-\delta,y_0+\delta)\subset\left[f\left(x_0-\frac{\varepsilon}{2}\right), f\left(x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$

Entonces $g(y_0-\delta,y_0+\delta)\subset g\left(\left[f\left(x_0-\frac{\varepsilon}{2}\right), f\left(x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\right) = gf\left(\left[x_0-\frac{\varepsilon}{2}, x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$

$=\left[x_0-\frac{\varepsilon}{2}, x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right]\subset(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$

Teorema $f:(a,b)\to(c,d)$ derivable y invertible, $f'>0$ (ó $f'<0$)

Entonces $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{(f')(f^{-1}(y))}$

(en particular la derivada existe).

dem caso $f'>0$. (caso $f'<0$ es igual)

Escribamos $g=f^{-1}$.

Queremos estudiar $\dfrac{g(y+k)-g(y)}{k}$.

Llamemos: $h(k) = \overbrace{g(y+k)}^{\to g(y)}-g(y) \xrightarrow[k\to 0]{} 0$ pues g es continua

$$g(y+k) = h(k)+g(y)$$

f
$$y+k = f(g(y)+h(k))$$
$$\| \qquad\qquad \Rightarrow k = f(g(y)+h(k)) - f(g(y))$$
$$f(g(y))+k$$

Así que $\dfrac{g(y+k)-g(y)}{k} = \dfrac{\overbrace{h(k)}^{\to 0}}{f(g(y)+\underbrace{h(k)}_{\to 0})-f(g(y))} \xrightarrow[k\to 0]{} \dfrac{1}{f'(g(y))}$

$$\left[f'(g(y)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(y)+h)-f(g(y))}{h} \right]$$

Obs Si ya supiéramos que f^{-1} es derivable, entonces por la regla de la cadena,

$$(f\circ f^{-1})'(x) = (f^{-1})'(x)\cdot f'(f^{-1}(x)) \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$\|$$
$$id'(x) = 1$$

Ej $f(x) = x^3 - 2x + 1$; $f'(x) = 3x^2 - 2$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{2/3} & & \sqrt{2/3} & \end{array} \qquad f'$$

Consideremos $f: \underbrace{(\sqrt{2/3}, +\infty)}_{\text{acá } f \text{ es inyectiva.}} \to (f(\sqrt{2/3}), +\infty)$

La inversa $f^{-1}: f((\sqrt{\tfrac{2}{3}}, +\infty)) \to (\sqrt{\tfrac{2}{3}}, +\infty)$ tiene derivada en

$y = 1$: $(f^{-1})(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

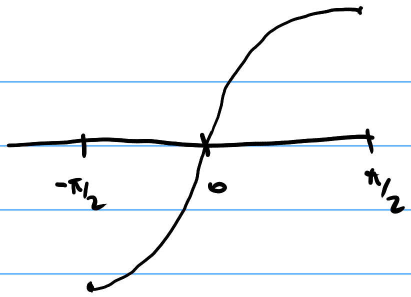
$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(1) = 0 \text{ pues } f(0) = 1 \\ f'(0) = -2 \end{array}\right\}$$

$y = 5$, : $f(2) = 2^3 - 2\cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 2$

$f'(2) = 10$

$\Rightarrow (f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(5))} = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{10}$

Arcoseno



seno.

$sen'(x) = \cos(x) > 0$ si $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

$\Rightarrow$ sen estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$.

$sen : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ es biyectiva.

La inversa se llama $arcosen : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.

$arcosen(0) = 0$

$arcosen(-1) = -\pi/2$

$arcosen(1) = \pi/2$

$x < x' \Leftrightarrow \underbrace{f(x)}_{y} < \underbrace{f(x')}_{y'}$

$f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$

Calculemos arcsen'.

$$arcsen'(y) = \frac{1}{sen'(arcsen(y))} = \frac{1}{\cos(arcsen(y))}$$

$y \in (-1, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \cos^2 x + sen^2(x) \\ \cos(x) \geq 0 \text{ si } x \in [-\pi/2, \pi/2] \end{array}\right) \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(arcsen(y))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} > 0$$