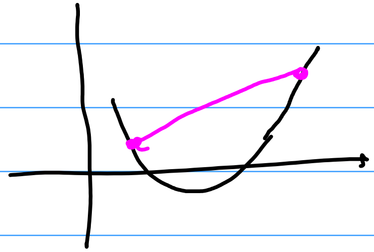
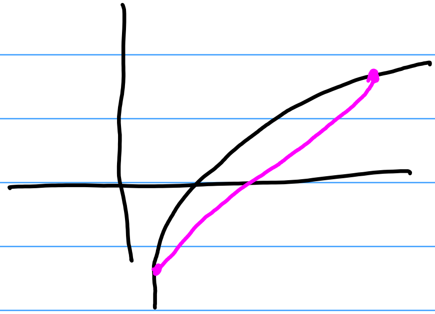
Convexidad



convexa para arriba $\iff f'' > 0$



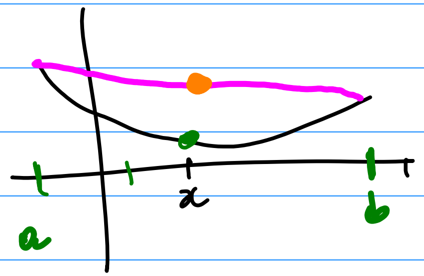
convexa para abajo. $\iff f'' < 0$

Teorema $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Suponemos que existe f'' en (a,b) y que $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$. Entonces la gráfica de f es estrictamente convexa para arriba en $[a,b]$

demostración Dados c y d, $a \leq c < d \leq b$ queremos ver que el segmento de recta que une $(c, f(c))$ con $(d, f(d))$ está por arriba de la gráfica.

$f|_{[c,d]} : [c,d] \to \mathbb{R}$. Alcanza con probar solamente el caso en los que c y d son los extremos del intervalo donde f está definida.

Así que probaremos que si $\underset{\text{continua}}{f : [a,b] \to \mathbb{R}}$ con $f'' > 0$ en (a,b) $\Rightarrow$ el segmento de recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ está por arriba del gráfico de f.



El segmento de recta tiene pendiente

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y entonces tiene ecuación

$$y = \alpha x + \beta, \text{ donde } \beta \in \mathbb{R}.$$

Pero $(a, f(a))$ está en la recta $\Rightarrow$ $f(a) = \alpha a + \beta$ $\Rightarrow$ $\beta = f(a) - \alpha a$

Entonces $y = \alpha x + f(a) - \alpha a = \alpha(x-a) + f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.

Queremos que la recta esté por arriba del gráfico de f. O sea, si $x \in (a,b)$

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)} > \boxed{f(x)}$$

Consideremos $\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) - f(x)$. $\boxed{\text{Queremos } \varphi(x) > 0 \text{ si } x \in (a,b).}$

Derivamos φ: $\varphi'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$.

Por el teorema del valor medio, existe $c \in (a,b)$ con $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$\Rightarrow \varphi'(x) = f'(c) - f'(x)$.

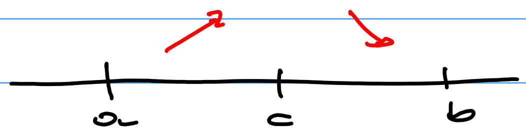
Caso 1: $a < x < c$. Por el teo del valor medio para f': existe $d \in (x,c)$ con

$$\underset{\vee \atop 0}{f''(d)} = \frac{f'(c)-f'(x)}{\underset{\vee \atop 0}{c-x}} \Rightarrow \underbrace{f'(c)-f'(x)}_{\varphi'(x)} > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0.$$

Caso 2: $c < x < b$. Por lo mismo existe $d \in (c,x)$ con

$$\underset{\substack{\vee \\ 0}}{f''(d)} = \frac{f'(x)-f'(c)}{\underbrace{x-c}_{>0}} > 0 \Rightarrow \underbrace{f'(x)-f'(c)}_{= -\varphi'(x)} > 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$$

(Caso 3: $c = x \Rightarrow \underset{c}{\varphi'(x)} = f'(c) - \underset{c}{f'(x)} = 0 \Rightarrow \varphi'(c) = 0$).



$\Rightarrow$ φ es estrictamente creciente en $[a,c]$
" " " decreciente " $[c,b]$

Como $\varphi(a) = 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0$ si $a < x \leq c$
" $\varphi(b) = 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0$ si $c < x < b$ $\Rightarrow$ $\varphi(x) > 0$ si $a < x < b$.

Teo Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y f'' existe en (a,b) y $f'' < 0$

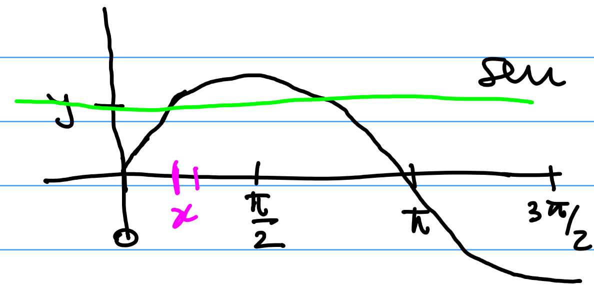
$\Rightarrow$ el gráfico de f es estrictamente convexo para abajo.

dem Si $g = -f \Rightarrow g'' = -f'' > 0$ en $(a,b) \Rightarrow g$ convexa para arriba $\Rightarrow f = -g$ convexa para abajo

Funciones invertibles

Una función f va a tener inversa si para cada y la ecuación $y = f(x)$ tiene una sola solución.

Es importante recordar que una función no es solamente "la fórmula", sino que es su dominio de definición, su codominio, y "la fórmula".



$\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(\pi)$

Si restringimos x a $[0, \pi/2]$ e y a $[0,1]$ entonces

$$[0, \pi/2] \rightleftarrows [0,1]$$

$$x \longleftrightarrow \underset{\operatorname{sen}(x)}{\overset{\shortparallel}{y}}$$

Ej $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ← distinto codominio

como $x^2 \geq 0$, uno puede pensar que $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ → no tiene función inversa. $f(-x) = f(x)$

o restringir f a $[0, +\infty)$: $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

tiene función inversa : $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Def Sean I, J intervalos de números reales ($\mathbb{R}$, $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ etc).

Decimos que una función $f: I \to J$ es **invertible** si $\exists\, g: J \to I$ tal que
$$\begin{cases} g\,f(x) = x & \forall x \in I \\ f\,g(y) = y & \forall y \in J. \end{cases}$$

Esta g se escribe f^{-1}

Ej $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ $f(x) = x^2$ es invertible. $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

$f: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ no es invertible.

Lema Si $f: I \to J$ es invertible y $g, h: J \to I$ con $g\,f(x) = x = h\,f(x)$ $\forall x \in I$
$f\,g(y) = y = f\,h(y)$ $\forall y \in J$

Entonces $g = h$ (la inversa de f es única y tiene sentido escribir f^{-1}).

Dem $g(y) = h(f(g(y))) = h(y)$.

Def Una función $f: I \to J$ es **inyectiva** si $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ $\forall x, x' \in I$.

" " " " sobreyectiva si $\forall y \in J\ \exists x \in I$ con $f(x) = y$.

Ej • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ no es inyectiva $(f(-1) = f(1))$

ni sobreyectiva (-1 no es x^2 para ningún x).

• sen, cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no son inyectivas.

Def f es biyectiva si es sobreyectiva e inyectiva.

o sea, si $y = f(x)$ tiene una única solución para cada y.

Lema Sea $f: I \to J$. f invertible $\Leftrightarrow$ f biyectiva.

dem Si f es invertible, para todo $y \in J$, $y = f(f^{-1}(y)) \Rightarrow f$ sobreyectiva

Si $x, x' \in I$ con $f(x) = f(x') \Rightarrow$ $\underset{x}{\underset{\shortparallel}{f^{-1}f(x)}} = \underset{x'}{\underset{\shortparallel}{f^{-1}f(x')}}$ $\Rightarrow x = x'$

$\Rightarrow f$ inyectiva.

Recíprocamente, si f es biyectiva, dado $y \in J$, existe único $x \in I$ con $f(x) = y$

Definimos $f^{-1}(y) := x$. Esto define una función f^{-1} que es inversa de f.

Ej $f(x) = ax+b$ con $a \neq 0$. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = ax+b \iff x = \dfrac{y-b}{a}$ f invertible con $f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$.

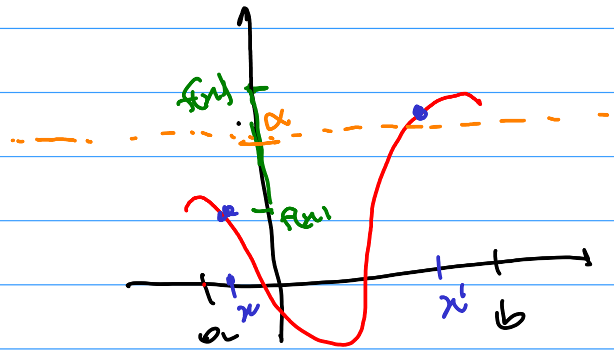
Vamos a usar

Teorema Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$f([a,b]) = \{ y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para un } x \in [a,b] \}$ es un intervalo en $\mathbb{R}$.

En otras palabras, si $x, x' \in [a,b]$ y α es un número $f(x) < \alpha < f(x') \Rightarrow$

$\alpha = f(c)$ para algún $c \in (a,b)$



Recta horizontal corta el gráfico.

Proposición Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (ó (a,b)) es estrictamente creciente $\Rightarrow$ f es inyectiva.

dem Si $x \neq x'$ en $[a,b] \Rightarrow$ $x < x'$ ó $x' < x$. $\Rightarrow$ $f(x) < f(x')$ ó $f(x') < f(x)$

$\Rightarrow$ $f(x) \neq f(x')$.

Teorema $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente. (decreciente).

Entonces $f: [a,b] \to [f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$) es invertible

dem Si $a < x < b \Rightarrow$ $f(a) < f(x) < f(b)$. Entonces, todos los valores de f están en $[f(a), f(b)]$

Veamos que $f: [a,b] \to [f(a), f(b)]$ es biyectiva.

1) Sobreyectiva: obviamente $f(a), f(b)$ son $f(x)$ para algún x.

Si $f(a) < y < f(b)$ por el teo anterior, $\exists\, c$, $a < c < b$

con $f(c) = y$.

Así que todos los $y \in [f(a), f(b)]$ son $f(x)$ para algún $x \Rightarrow f$ sobreyectiva.

2) f inyectiva pues es estrictamente creciente. ■

Ej $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) > 0$ si $x \in (0, \pi/2)$ $\Rightarrow$ sen estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$

$\Rightarrow$ $\operatorname{sen} : [0, \pi/2] \to [\underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0}, \underbrace{\operatorname{sen}(\pi/2)}_{1}]$ es invertible

La inversa se llama arcoseno: $\operatorname{arcsen} : [0,1] \to [0, \pi/2]$.