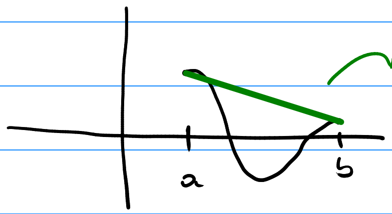
Recordemos: Teorema del valor medio.

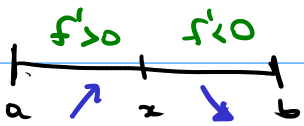
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). Existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Vimos: Si $f'\geq 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow$ f creciente
$\leq$ decreciente

$f'>0$ " $\Rightarrow$ f estrictamente creciente
<0 " decreciente.

Si sabemos que



$\Rightarrow$ f tiene máximo local en x.
etc..

Para graficar una función f nos fijamos en:

1) intersección de la gráfica con los ejes coordenados
2) los puntos x donde $f'(x)=0$
3) las regiones de (de)crecimiento.
4) máximos y mínimos.
5) comportamiento de f cuando x es muy grande o chico
o sea $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

6) Regiones donde el gráfico es convexo hacia arriba o hacia abajo.

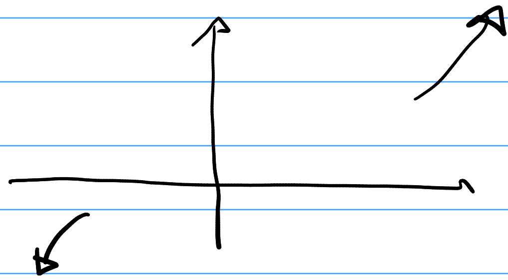
Ej $f(x) = x^3 - 2x - 1 \underset{x\neq 0}{=} x^3\left(1 - \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3}\right) = \underbrace{x^3}_{\substack{x\to+\infty \\ +\infty}}\underbrace{\left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}_{\substack{x\to+\infty \\ 1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$x \to -\infty$: $-\infty$

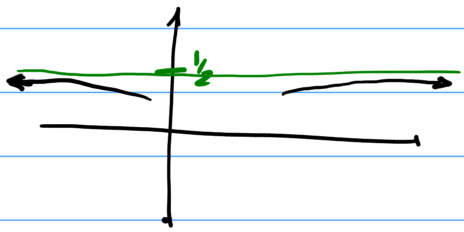
$\frac{2}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$



Ej $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{2x^3 - x + 1} \underset{x\neq 0}{=} \dfrac{\cancel{x^3}\overbrace{\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}^{x\to\pm\infty \;\to\; 1}}{2\cancel{x^3}\underbrace{\left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)}_{x\to\pm\infty \;\to\; 1}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \dfrac{1}{2}$



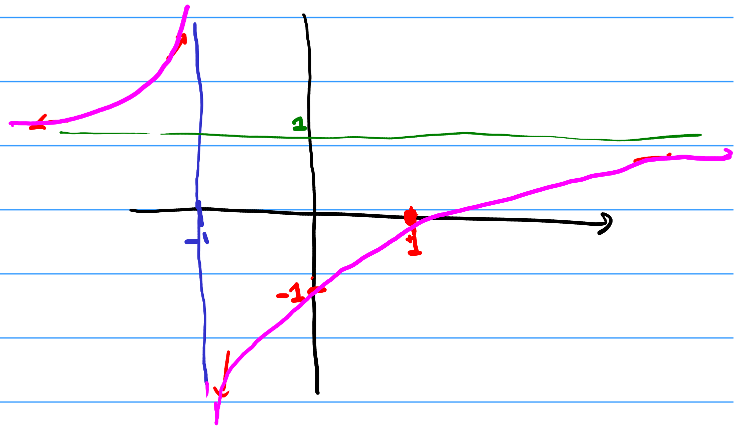
Ej: $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+5} \underset{x\neq 0}{=} \frac{\cancel{x^3}\overbrace{(1-1/x^3)}^{\xrightarrow{x\to\pm\infty} 1}}{\cancel{x^2}\underbrace{(1+5/x^2)}_{\downarrow x\to\pm\infty \;\; 1}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$

Ej: $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. f no está definida en $x=-1$

$f : \mathbb{R}-\{-1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

1) $f(x)=0 \iff x=1$. $f(0) = -1$

2) $f'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$



f' nunca vale 0.

3) $(x^2+1)>0$ en el dominio de f

$\Rightarrow f'>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es estrictamente creciente.

4) f no tiene máximo ni mínimo: su dominio $\mathbb{R}-\{-1\}$ es abierto

y por lo tanto, si $f(x)$ fuera máximo (mínimo) $\Rightarrow f'(x)=0$. Pero esto no sucede.

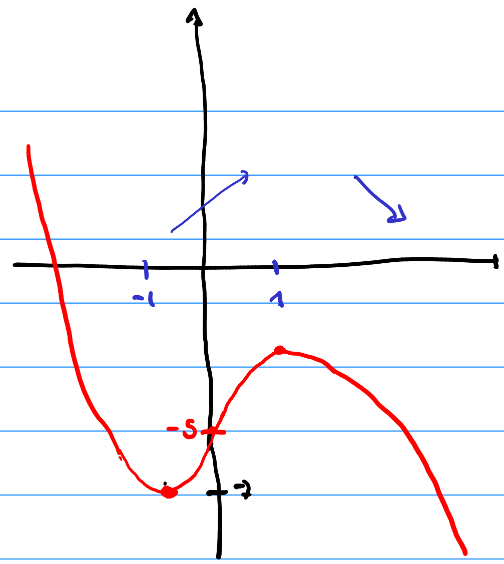
5) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{\cancel{x}\overbrace{(1-1/x)}^{\to 1}}{\cancel{x}\underbrace{(1+1/x)}_{\downarrow 1}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$.

6) Comportamiento cuando $x \to -1^{\pm}$.

$\frac{x-1}{x+1} = \underbrace{(x-1)}_{\downarrow x\to -1 \;\; -2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x+1}_{\downarrow x\to -1^{\pm} \;\; 0^{\pm}}}}_{x\to -1^{\pm} \;\; \pm\infty} \xrightarrow[x\to -1^{\pm}]{} \mp\infty$

Ej

$$f(x) = -x^3+3x-5$$

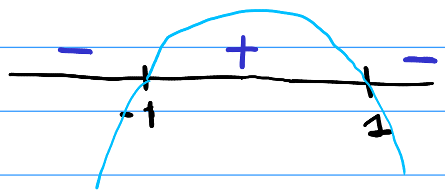


1) $f(0) = -5$

2) $f'(x) = -3x^2+3 = 3(-x^2+1)$

$f'(x)=0 \iff x^2=1 \iff x=\pm 1$

signo de f' = signo de $-x^2+1$.



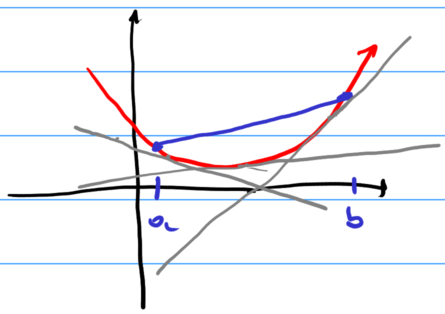
$f(-1) = -(-1)+3(-1)-5 = 1-3-5 = -7$ mínimo local.

$f(1) = -3$ máximo local.

$$f(x) = -x^3+3x-5 = \underbrace{x^3}_{\substack{x\to\pm\infty \\ \pm\infty}} \overbrace{\Big(-1+\underbrace{\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}}_{0}\Big)}^{x\to\pm\infty\ \to -1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \mp\infty$$

Graficando f vemos que existe una sola raíz del polinomio y además es menor que -1

Convexidad



f convexa hacia arriba = gráfico queda por abajo del segmento azul.

= f' es creciente = $f''>0$.

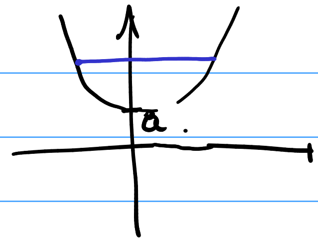
Va a suceder que f convexa hacia arriba $\iff f''>0$

abajo $\iff f''<0$.

Ej: $f(x) = x^2 + a$

$f'(x) = 2x$

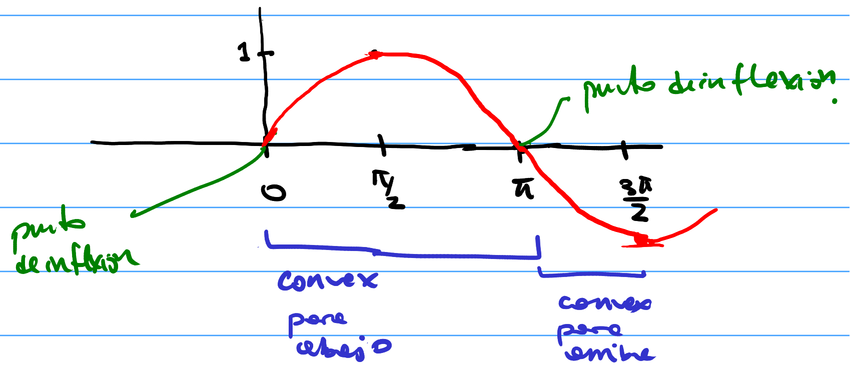
$f''(x) = 2 > 0$



Ej: $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$



Punto de inflexion : punto donde f'' se anula.

Ej $f(x) = x^3$.

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$x = 0$ punto de inflexión.

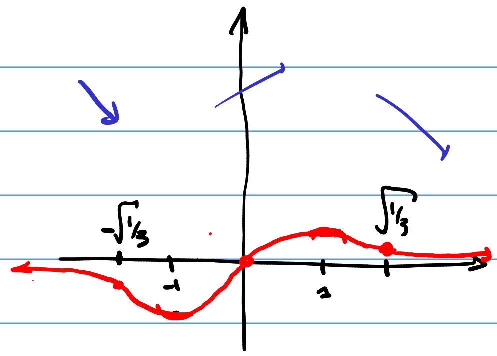
Obs Si cambia la convexidad de f en $x \Rightarrow x$ punto de inflexion.
Puede pasar que x sea punto de inflexión y la convexidad no cambie.

Ej: Hallar puntos de inflexión de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Como $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 > 0 \Rightarrow f$ está definida en $\mathbb{R}$.

$0 = f(x) \Leftrightarrow x = 0$.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$



$$f'(x) = \frac{x^2+1 - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$0 = f'(x) \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad f(-1) = -\frac{1}{2}$$

Signo de f' = signo de $-x^2+1$

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

$f(-1)$ mínimo local

$f(1)$ máximo local.

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2x\,(x^2+1)^{\cancel{2}} - (x^2+1)\,2\cancel{(x^2+1)}\,2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}}} = \frac{-2x(x^2+1) - 4x(-x^2+1)}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{2x\left(x^2+1 - 2(-x^2+1)\right)}{x^2+1} = \frac{2x\,(3x^2-1)}{x^2+1}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{2x}\,\underline{(3x^2-1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{1/3} \end{cases}$$

Signo f''

$$\begin{array}{ccccccc} & - & & & + & & \\ + & & & - & & & + \\ - & & + & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{\frac{1}{3}} & & 0 & & +\sqrt{\frac{1}{3}} & \end{array}$$

$$f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = \frac{-\sqrt{1/3}}{\frac{1}{3}+1}$$

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\underbrace{(x+\frac{1}{x})}_{\substack{\downarrow x\to-\infty \\ -\infty}}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^-$$

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\underbrace{(x+\frac{1}{x})}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ +\infty}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$$