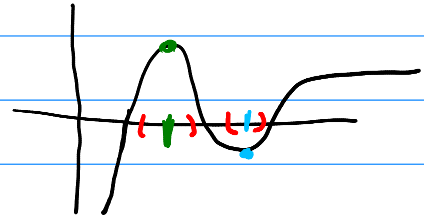
Hemos visto:

- Máximos y mínimos locales



f tiene máximo (mínimo) local en x_0 si hay un intervalo abierto que tiene a x_0 donde $f(x_0)$ es el máximo (mínimo) de f en ese intervalo.

- Si f está definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, entonces

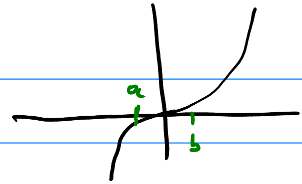
$$\left.\begin{array}{c} (f \text{ tiene máximo o mínimo local en } x_0) \\ + \\ (f \text{ derivable en } x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

- Aunque f sea derivable puede ser que $f'(x_0) = x_0$ pero f no tenga extremo local en x_0.

Ej: $f(x) = x^3$

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2$

$\qquad\qquad\qquad$ $f'(0)=0.$



pero f no tiene extremos locales.

(Cualquier intervalo abierto que contiene 0, tiene puntos $a<0 \Rightarrow f(a)<0$
$b>0 \Rightarrow f(b)>0$)

- Teo (del valor medio) $\quad f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua y es derivable en $(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ con $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- Si $f' \geq 0$ en un intervalo $\Rightarrow$ f creciente en el intervalo

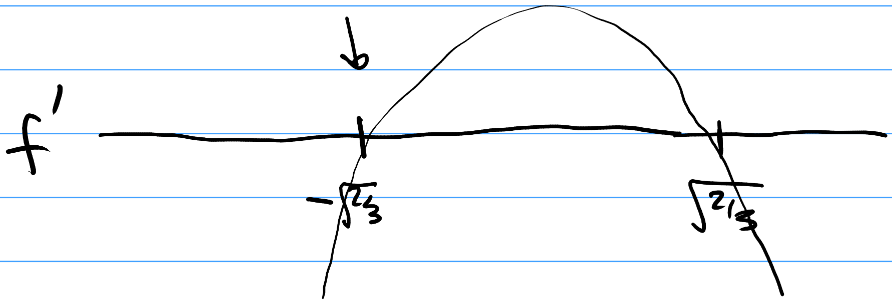
$\quad > 0$ $\qquad$ estrictamente creciente

$f' \leq 0$ $\Rightarrow$ f decreciente

$f < 0$ $\Rightarrow$ f estrictamente decreciente.

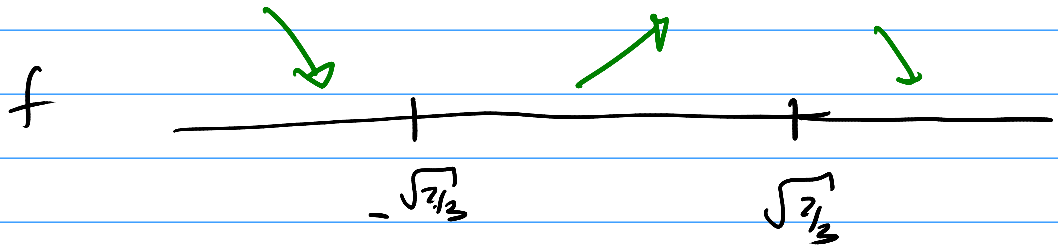
Ej: $f(x) = -x^3 + 2x + 1$; $f(x) = -3x^2 + 2$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 2 \iff x^2 = 2/3 \iff x = \pm\sqrt{2/3}$



f tiene mínimo local en $-\sqrt{2/3}$

f tiene máximo local en $\sqrt{2/3}$



Ejercicio Un alambre de longitud L se corta en dos partes. Una se dobla en un círculo y la otra en un triángulo equilátero.

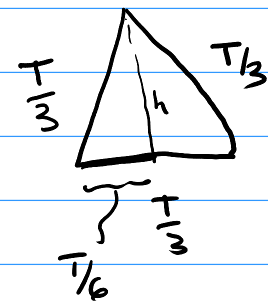
¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas del círculo y triángulo sean a) mínima
b) máxima ?

$$\underbrace{\text{Perímetro del círculo}}_{= C} + \underbrace{\text{Perímetro del triángulo}}_{= T} = L$$

d = área del círculo $= \pi r^2$ (donde r es el radio.) $= \pi \dfrac{C^2}{\pi^2} = \dfrac{C^2}{\pi}$

$$C = r\pi \Rightarrow r = \frac{C}{\pi}$$

e = área del triángulo $= \dfrac{1}{2}\dfrac{T}{3} h$



$$\left(\frac{T}{3}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{T}{6}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{T^2}{3^2} - \frac{T^2}{6^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{T^2}{3^2} - \frac{T^2}{2^2 \cdot 3^3}} = \sqrt{\frac{T^2}{3^2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{T}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow e = \frac{T}{6}\,\frac{T}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$L = T + C \Rightarrow C = L - T \Rightarrow d = \frac{(L-T)^2}{\pi}$$

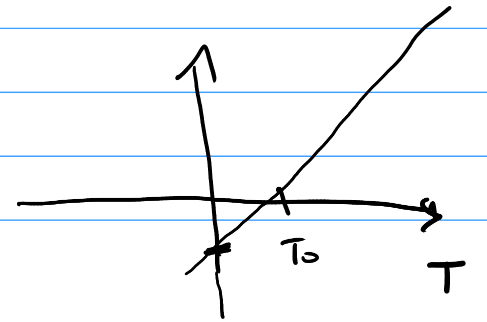
suma de las áreas

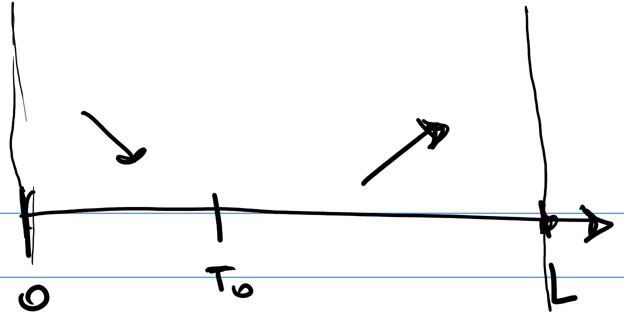
$$f(T) = \overbrace{\frac{(L-T)^2}{\pi}}^{d} + \overbrace{\frac{T^2\sqrt{3}}{6^2}}^{e}$$

$$f'(T) = -\frac{2(L-T)}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{6^2}\,2T =$$

$$= -\frac{2L}{\pi} + \frac{2T}{\pi} + \frac{2\sqrt{3}}{6^2}\,T = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{2\sqrt{3}}{6^2}\right)T - \frac{2L}{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{\cancel{2}\,L/\pi}{\cancel{2}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{6^2}\right)},$$



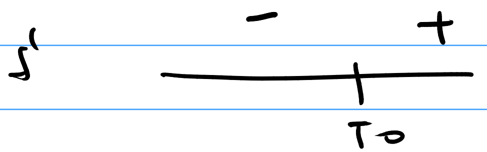


área como función de T

Así que el área es mínima en T_0

b) $f(T)$ sabemos que tiene máximo en $[0,L]$ por ser continua.

El máximo no está en $(0,L)$. Si estuviera en $x \in (0,L)$, tendríamos que f tiene máximo local en $x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x = T_0$ pero en T_0 hay un mínimo local. No puede ser.



Así que el máximo está o en 0 o en L

Veamos dónde f sea más grande.

$$f(0) = \frac{L^2}{\pi}$$

$$f(L) = \frac{\sqrt{3}}{6} L^2 = \frac{L^2}{2\sqrt{3}}$$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2 \cdot \sqrt{3}\cancel{\sqrt{3}}} \right]$$

$$2\sqrt{3} \sim 3{,}46$$
$$\vee$$
$$\pi \sim 3{,}14$$

$$\frac{1}{\pi} > \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

f tiene máximo en $f(0)$.

Área máxima es cuando $T=0$, osea cuando hacemos solamente el círculo.

Ej Determinar $a \in \mathbb{R}$ tal que $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + a/x$ tiene

a) mínimo local en $x = 2$

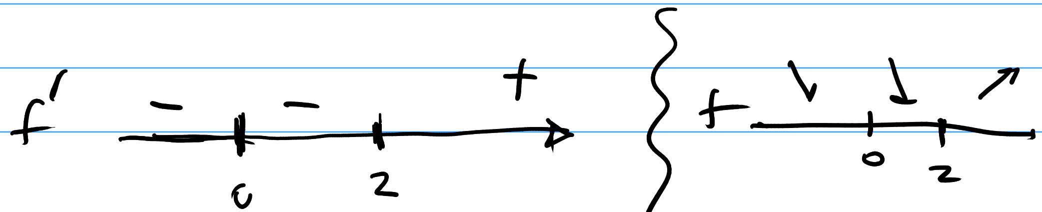
b) " " " $x = -3$

c) Demostrar que f no tiene máximos locales para ningún valor a a.

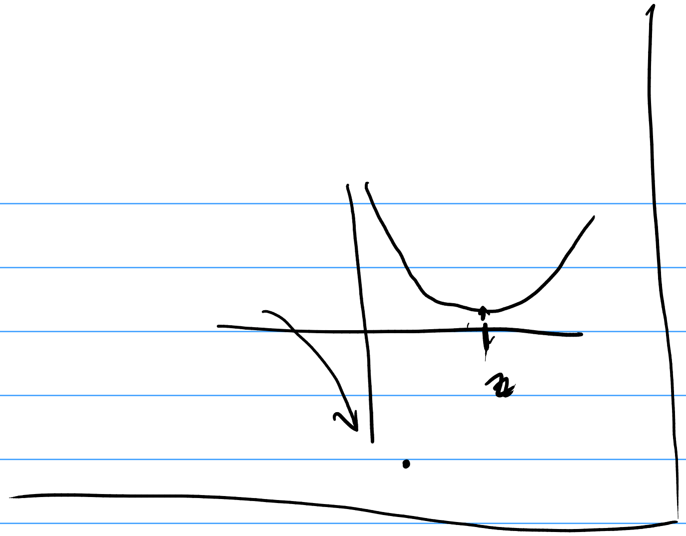
(a) La condición implica $f'(2) = 0$.

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 4 - \frac{a}{2^2} = 4 - \frac{a}{4} = 0 \Rightarrow a = 16$$

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$$



2 mínimo local.



(b) $0 = f'(-3) = -6 - \frac{a}{9} \iff \frac{a}{9} = -6$

$\iff a = 6 \cdot 9 = 54$

c) Alcanza con ver que si $f'(x)=0 \Rightarrow x$ no es máximo local.

$0 = f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} \iff 2x = \frac{a}{x^2} \iff 2x^3 = a \iff x = \sqrt[3]{a/2}$

$\downarrow$

único punto donde f puede tener máximo local.