Teo $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable

1) Si $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f es constante

2) Si $f'(x) > 0$ '' $\Rightarrow$ f es estrictamente creciente
$\geq$ creciente

3) Si $f'(x) < 0$ '' $\Rightarrow$ f es estrictamente decreciente.
$\leq$ decreciente.

dem Como f es derivable, si $a < a' < b' < b$

f restricta a $[a',b']$ es una función
- continua pues f es continua en todo (a,b)
- derivable en (a',b') pues lo es en (a,b)

$\Rightarrow$

Teo $\Rightarrow \exists \ c \in (a',b')$ con $f'(c) = \dfrac{f(b') - f(a')}{b'-a'}$. (*)

1) Si $f' = 0 \Rightarrow$ Por (*) $f(b') - f(a') = 0$ o sea $f(a') = f(b')$

Pero $a'<b'$ son cualesquiera en (a,b). $\Rightarrow$ f es constante.

2) Sup. que $f' \geq 0$ $\Rightarrow$ Por $\circledast$ $f(b') - f(a') \geq 0$

o sea $f(a') \leq f(b')$.

Como $a'<b'$ son cualquiera $\Rightarrow$ f es creciente.

Si $f' > 0$ $\Rightarrow$ Por $\circledast$ $f(b') - f(a') > 0$ $\Rightarrow$ $f(a') < f(b')$

$\Rightarrow$ f estrictamente creciente.

3) Sup $f' \leq 0$. Tomamos $g = -f$ $\Rightarrow$ $g' = -f' \geq 0$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} \underset{-f}{\overset{}{\underset{\|}{g}}} \text{ creciente} \Leftrightarrow f \text{ decreciente}$$

Similarmente $f' < 0$ $\Rightarrow$ f es estrictamente decreciente.

Cor Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b).

Entonces vale lo mismo que en el teorema anterior.

Coro (1) Si $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ son derivables y $f'=g'$ $\Rightarrow$

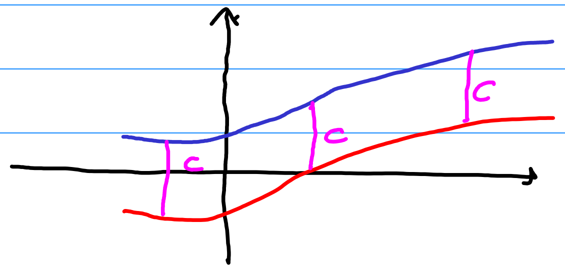
existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=g(x)+c$ $\forall x\in(a,b)$.

(2) Si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas y derivables en (a,b), $f'=g'$

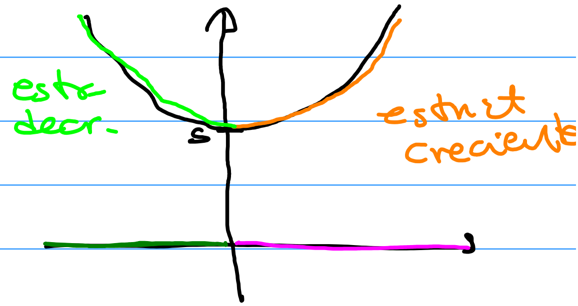
$\Rightarrow$ existe $c\in\mathbb{R}$ t.q. $f(x)=g(x)+c$. $\forall x\in(a,b)$

dem Si $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, tenemos que $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)$
$=0$

$\Rightarrow\varphi$ es constante, o sea $\exists c\in\mathbb{R}$ $f(x)-g(x)=c$ $\forall x$.



Ej $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2+5.$



$$f'(x) = 2x = \begin{cases} >0 & \text{si } x>0 \\ <0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

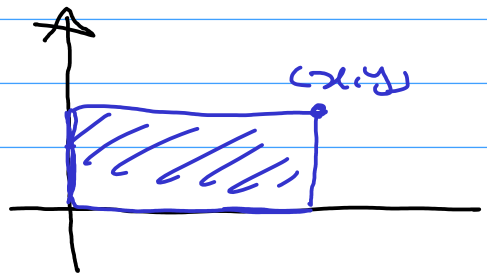
$\Rightarrow$ f es estrictamente creciente en $x>0 \qquad (0,+\infty)$

" " " decreciente en $x<0 \qquad (-\infty,0)$

Se deduce que $f(0)=5$ es el mínimo: si $\underline{x<0}$, $\underline{f(x)>f(0)}$

$\underline{0<x}$, $\underline{f(0)<f(x)}$

Ej Demostrar que entre todos los rectángulos de un área $A>0$ dado, el de menor perímetro es el cuadrado.



Dar un rectángulo es dar (x,y), $x>0$, $y>0$.

El área es $x \cdot y = A \Rightarrow y = A/x$

El perímetro es $2(x+y) = 2(x+A/x)$

Queremos minimizar $f(x) = x + A/x$

$$f'(x) = 1 + A\,\frac{-1}{x^2} = 1 - \frac{A}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{A} \qquad (x>0)$$

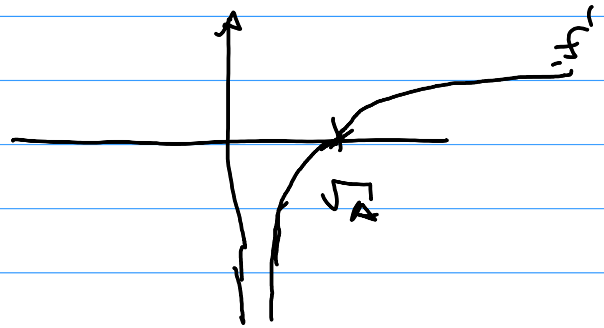
si $x > \sqrt{A} \iff x^2 > A \iff \frac{A}{x^2} < 1 \iff f'(x) = 1 - \frac{A}{x^2} > 0$

si $0 < x < \sqrt{A} \Rightarrow x^2 < A \iff \frac{A}{x^2} > 1 \iff f'(x) = 1 - \frac{A}{x^2} < 0$

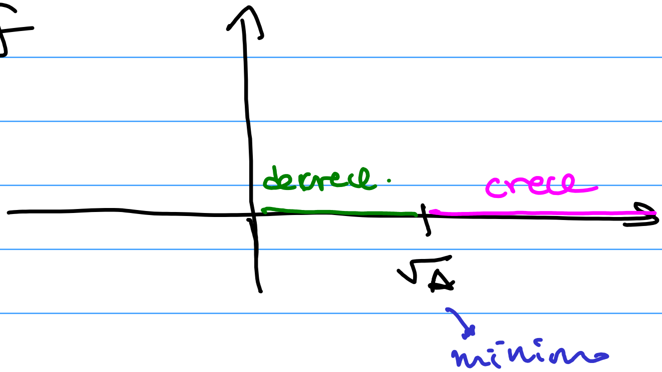
f estrict. creciente en $(\sqrt{A}, +\infty)$

f estr. decrec. en $(0, \sqrt{A})$.

f' tiene gráfico



f



$\Rightarrow$ f tiene mínimo en $\sqrt{A}$

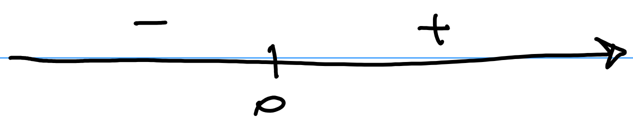
o sea el rectángulo de área mínima es el de lados $x = \sqrt{A}$

$$y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$$

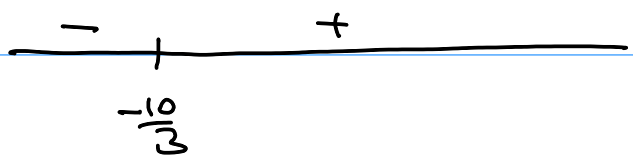
$\Rightarrow$ cuadrado.

Ej: Determinar los intervalos donde $f(x) = x^3 + 5x^2 - 1$ es creciente y decreciente.

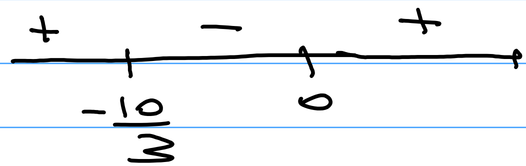
$$f'(x) = 3x^2 + 10x = x(3x+10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{10}{3}. \end{cases}$$



$g(x) = x$



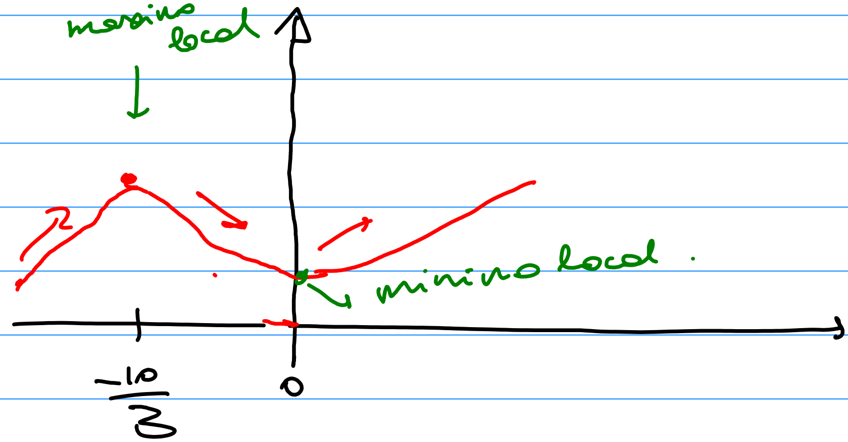
$h(x) = 3x+10$



$f'(x)$

f estrictamente creciente en $(-\infty, -\frac{10}{3})$ y $(0, +\infty)$

" " decreciente en $(-\frac{10}{3}, 0)$

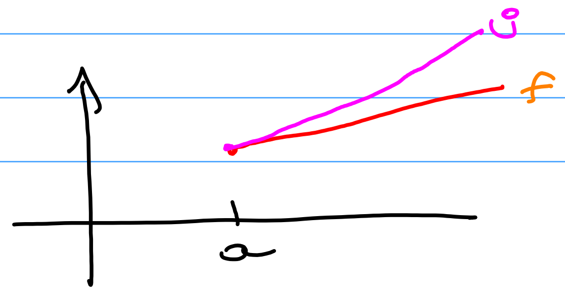


f

Corolario Si $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas y derivables en (a,b) y

- $f'(x) \leq g'(x)$
- $f(a) \leq g(a)$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$



dem. $\varphi(x) = g(x) - f(x)$.

$\varphi'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0 \quad \forall x$

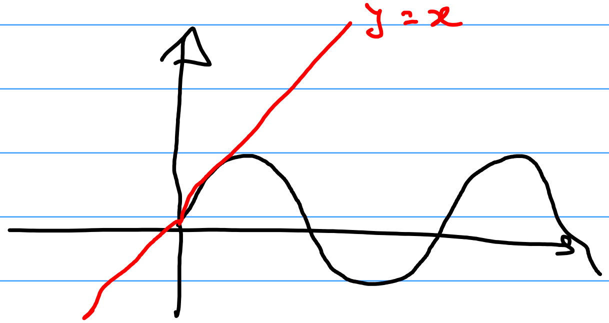
$\rightarrow \varphi$ creciente.

$\varphi(a) = 0$

Si φ es creciente y vale 0 al principio de $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\varphi(x) \geq 0$

O sea $f(x) \geq g(x)$ $\forall x$.

Ej: Probar que si $x \geq 0$, entonces $\operatorname{sen}(x) \leq x$



$f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$g(x) = x$

$[a,b] = [0, c]$

$f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$

$g(0) = 0.$

$f'(x) = \cos(x)$ $\Rightarrow$ $f'(x) \leq 1 = g'(x)$

$g'(x) = 1$

Por corolario $f(x) \leq g(x)$ $\forall x$ $[0, c]$

Para cualquiera así que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [0, +\infty)$.

Ej Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$

$$\underbrace{x^n - 1}_{g(x)} \geq \underbrace{n(x-1)}_{f(x)}$$

$[a,b] = [1,c]$

$c > 1$ cualquiera

$f(1) = 0 = g(1)$

$f'(x) = n$

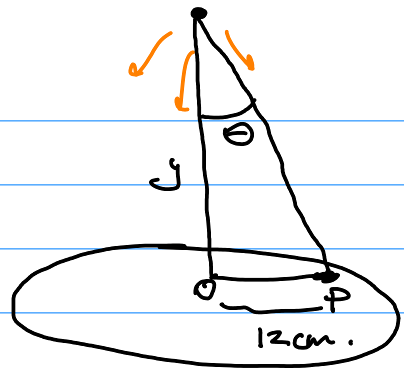
$\wedge|$

$g'(x) = n x^{n-1}$ porque $x \geq 1$

Entonces $f \leq g$. ✓

Ej

Tenemos una fuente de luz.
La intensidad de la luz en P
es proporcional a $\cos\theta$ y a $\frac{1}{y^2}$



¿A qué altura y debe estar la fuente de luz
para tener la máxima intensidad en P que está a 12 cm
de O?

$$\text{Intensidad} = c \cdot \cos\theta \cdot \frac{1}{(\text{distancia a } P)^2} \quad \text{donde } c \text{ es constante.}$$

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{(12)^2+y^2}}$$

$$\text{distancia a } P = \sqrt{(12)^2+y^2}$$

$$I(y) = c\frac{y}{\sqrt{(12)^2+y^2}} \cdot \frac{1}{(12)^2+y^2} = c\frac{y}{((12)^2+y^2)^{3/2}} = c\,y\,((12)^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$I'(y) = c\left(\left((12)^2+y^2\right)^{-3/2} - \frac{3}{\cancel{2}}\, y \left((12)^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cancel{2}y \right) =$$

$$= \underbrace{c}_{>0} \underbrace{\left((12)^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}_{>0} \left(1 - \underbrace{3y^2\left((12)^2+y^2\right)^{-1}}_{=1} \right) = 0$$

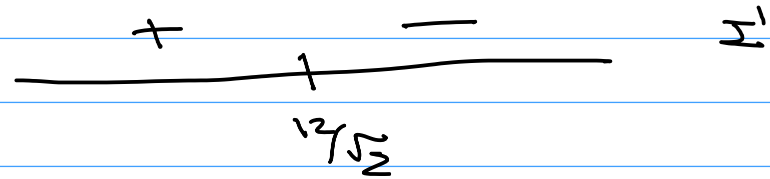
$$\iff \frac{3y^2}{(12)^2+y^2} = 1 \iff 3y^2 = (12)^2+y^2$$

$$\iff 2y^2 = (12)^2 \iff y = \frac{12}{\sqrt{2}} \quad (y>0)$$

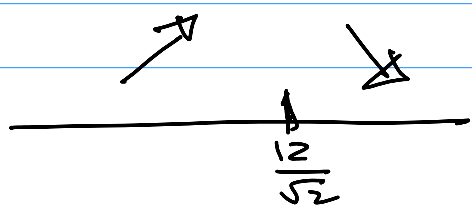
$$I'(y) > 0 \iff \frac{3y^2}{(12)^2+y^2} < 1 \iff 3y^2 < (12)^2+y^2 \iff 2y^2 < (12)^2 \iff$$

$$\underline{y < \frac{12}{\sqrt{2}}}$$

$$I'(y) < 0 \iff y > \frac{12}{\sqrt{2}}$$



Así que I es



Así que el máximo está en $12/\sqrt{2}$.