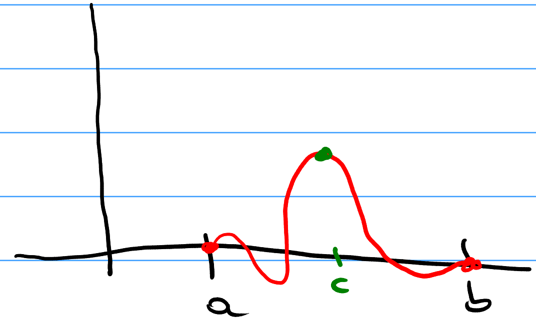
Teorema del valor medio



Lema Sea $a<b$ números, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b).

Si $f(a)=0=f(b)$ y f no es constante

$\Rightarrow \exists\ c\in(a,b)$ con $f'(c)=0$.

$(a<c<b)$

Esto sale del teorema que dice:

Teo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua $\Rightarrow$ f tiene máximo y mínimo.

$$\left(\begin{array}{llll} \exists\ c\in[a,b] \text{ t.q. } & f(x)\le f(c)\ \forall x\in[a,b] & \leftrightarrow & \text{tiene máximo} \\ \exists\ d\in[a,b] \text{ t.q. } & f(x)\ge f(d)\ \forall x\in[a,b] & \leftrightarrow & \text{tiene mínimo} \end{array}\right)$$

Sabemos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ no es constante.

Sabemos que f tiene un máximo: $\exists\, c\in[a,b]$ tq. $\qquad f(d)\le f(x)\le f(c)$
$\exists\, d\in[a,b]$ $\qquad \forall x\in[a,b]$.

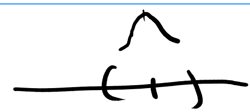
Notar: $f(d)$ y $f(c)$ no pueden ser ambos 0. Si lo fueran, $0\le f(x)\le 0$ $\forall x$

$\Rightarrow f$ es constante. Absurdo.

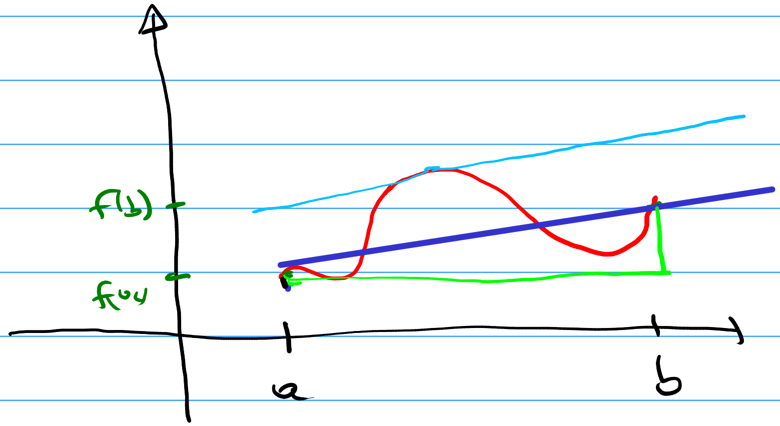
$$\left.\begin{array}{l} \text{Supongamos que } f(c)\neq 0. \\ 0=f(a) \\ 0=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c\neq a \\ c\neq b \end{array} \Rightarrow c\in(a,b).$$

$$\text{Así que } c\in(a,b) \text{ y } f \text{ tiene máximo en } c \to \left.\begin{array}{l} f \text{ tiene máximo local en } c \\ f \text{ derivable en } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(c)=0$ como vimos.



En el caso que $f(c)=0 \Rightarrow f(d)\neq 0$ y se hace el mismo razonamiento usando que es mínimo.



Recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Hay un punto $c \in (a,b)$ donde la recta tangente al gráfico de f es paralela a la recta azul.

O sea, $f'(c)$ = pendiente de la recta azul.

Teorema $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, derivable en (a,b). Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>dem</u> Cómo es la recta por $(a,f(a))$, $(b,f(b))$

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x + u$$

$$f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,a + u \Rightarrow u = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,a.$$

<u>Caso 1</u> $\quad f(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x + u$ (el gráfico de f es una recta).

En este caso, para cualquier $c \in (a,b)$, $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>Caso 2</u> $\quad f$ no es como en el caso 1.

$$g(x) = \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{cont}\\ \text{derivable}\\ \text{por hipótesis}}} - \underbrace{\underbrace{\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x + u\right)}_{\text{"recta".}}}_{\substack{\text{cont.}\\ \text{derivable ✓.}}}.$$

Tenemos $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua pues es resta de funciones continuas.

g derivable en (a,b) por ser resta de funciones derivables en (a,b)

$g(a) = f(a) - f(a) = 0$

$g(b) = f(b) - f(b) = 0$

g no es constante (cero) pues estamos asumiendo que f no es igual a la recta.

$\Rightarrow$ Por el lema $\exists\, c \in (a,b)$ tq $g'(c) = 0$.

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Funciones crecientes y decrecientes

Def Una función f es creciente si $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

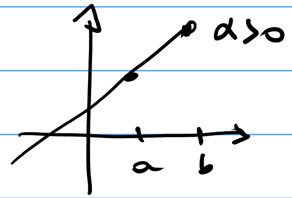
decreciente $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

En ambos casos se dice que f es monótona.

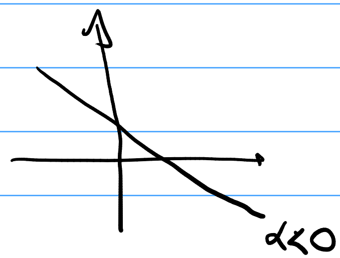
f es <u>estrictamente creciente</u> si $a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$

estrictamente <u>decreciente</u> si $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$.

<u>Ej</u> $f(x)=\alpha x+\beta$

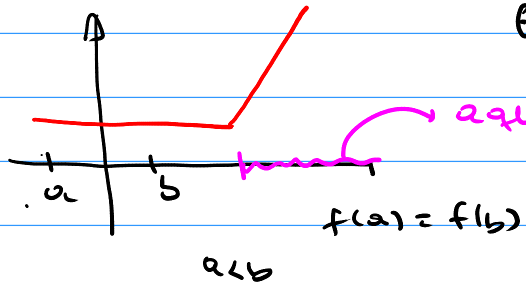


estrictamente creciente



estrictamente decreciente.

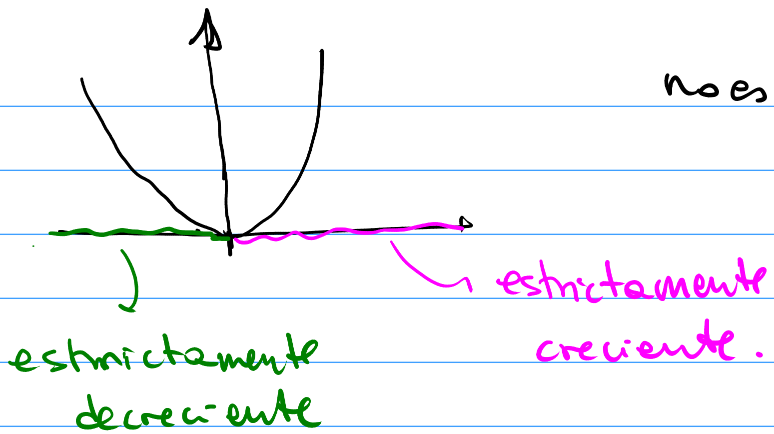
<u>Ej</u>



Es creciente, pero no estrictamente creciente.

aquí es estrictamente creciente.

Ej $f(x) = x^2$



no es creciente ni decreciente.

Teo $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable.

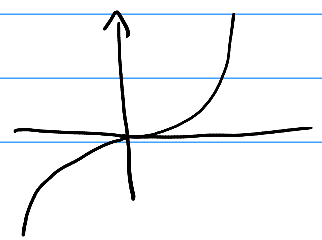
1) si $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es constante.

2) si $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

3) si $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ " " " decreciente

Obs Puede suceder que f sea estrictamente creciente y que $\exists\, c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$

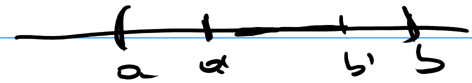
$f(x) = x^3$



$a < b \Rightarrow a^3 < b^3$

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$

dem Si $a < a' < b' < b$



Consideremos f restricta a $[a', b']$.

$f : [a', b'] \to \mathbb{R}$ es continua, derivable en (a', b').

$\Rightarrow \exists\, c \in (a', b')$ con $f'(c) = \dfrac{f(b') - f(a')}{b' - a'}$.

1) $f' = 0 \Rightarrow 0 = f'(c) = \qquad \Rightarrow f(b') - f(a') = 0 \Rightarrow f(a') = f(b')$.

Como $a' < b'$ son cualquiera en (a, b), f vale lo mismo en cualquier par de puntos $\to$ f constante.