Potencias y logaritmos

si $n \geq 0$, $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$

Ya vimos x^n donde $n \in \mathbb{Z}$, y si $f(x) = x^n$ vimos $f'(x) = nx^{n-1}$.

$x^{\frac{1}{n}}$ donde $n \in \mathbb{Z}$: $\sqrt[n]{x}$ $x > 0$

↳ el número > 0 que elevado a la n da x.

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Propiedades de la potencia:

$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$

$x^{ab} = (x^a)^b = (x^b)^a$

$x^0 = 1$

$x^1 = x$

Si $x > 0$, se puede definir x^a, $a \in \mathbb{R}$ (antes estaba definido para fracciones, es decir $a \in \mathbb{Q}$)

Esto lo definiremos formalmente más adelante.

Va a seguir valiendo que la derivada de x^a es $\underline{ax^{a-1}}$.

Supongamos que graficamos $f(x)=b^x$ (variable es x), $b>0$ fijo.

Cuanto más grande es b, más empinada es gráfica.

Cuando $b=1$, $f(x)=1^x=1 \Rightarrow f'(x)=0$.

Existe un valor de b para el cual la pendiente en $x=0$ es 1 ($f'(0)=2$).

Este valor de b se escribe $\underline{\underline{e}}$, y a veces se llama número Euler.

e no es una fracción (es un número real irracional) $e \simeq 2,71\ldots$?.

Uno puede definir $\exp(x) = e^x$ función exponencial.

exp es la única función derivable f que cumple $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$(e^x)' = e^x$.

$$\left(\begin{array}{c} e^x > 0 \\ e^{x+y} = e^x e^y \\ (e^x)^y = e^{xy} \end{array} \right).$$

Uno puede definir $\log(y)$ como el número x que cumple $e^x = y$.

O sea $e^{\log y} = y$. El hecho que hay un sólo número que cumple esto luego lo veremos.

$$\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$\log(1) = 0 \quad (\text{pues } e^0 = 1)$$

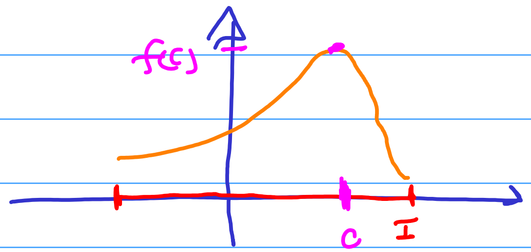
Veremos que $\log'(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$

Extremos de una función

Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función definida en el intervalo I

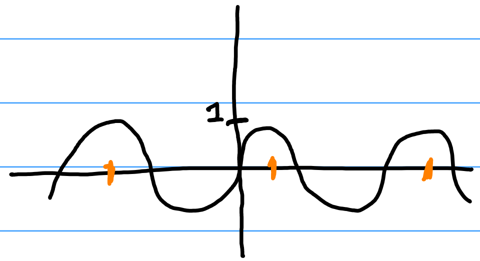
I puede ser $\mathbb{R}$, (a,b), $[a,b)$, $[a,b)$, $[a,b]$, etc. .

Decimos que f tiene un máximo en $c \in I$ si $\quad f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in I$.



$f(c)$ es el máximo de f.

Obs Pueden haber varios $c \in I$ donde f tiene un máximo. P.e. $f = \text{sen}$.



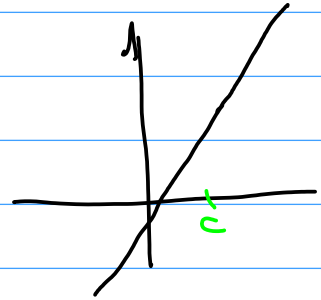
$$\text{sen}\left(\pi/2 + 2\pi n\right) = 1 \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Así que sen tiene máximo en $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, ...

Decimos que f tiene un mínimo en $c \in I$ si $f(c) \le f(x) \ \forall x \in I$.

Obs

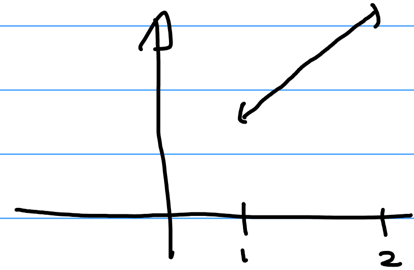
No tiene porqué existir el máximo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$



f no tiene máximo: si tuviera máximo en $c \in \mathbb{R}$

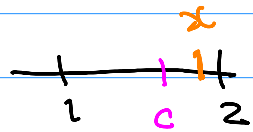
quiere decir $\underset{\overset{\|}{x}}{f(x)} \le c \ \forall x \in \mathbb{R}$. Absurdo. Entonces f no tiene máximo.

Obs $f: (1,2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$



Al ser el intervalo abierto, f no va a tener máximo.

Si tuviera máximo en $c \in (1,2)$
$1 < c < 2$



Tomo $x \in (1,2)$, $c < x < 2$ $\left(x = c + \frac{2-c}{2} = \frac{c+2}{2} \right)$

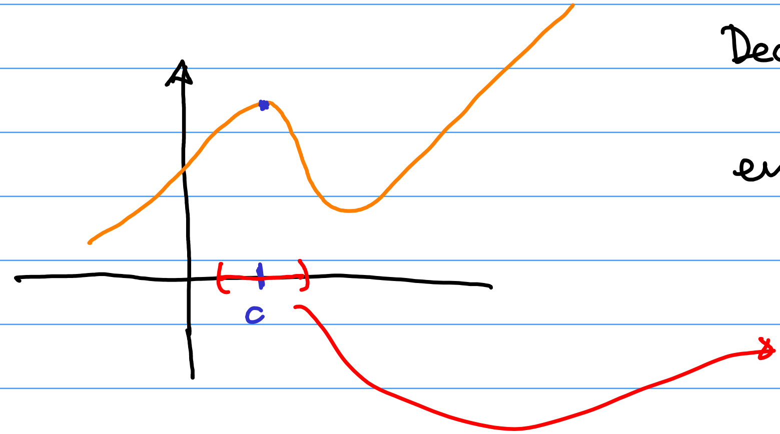
$\Rightarrow f(c) = c < x = f(x) \Rightarrow f(c)$ no es máximo de f. Absurdo. Así que f no tiene máximo.

Teo Sea $[a,b]$ es un intervalo cerrado y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua

$\Rightarrow f$ tiene máximo y mínimo.

No lo probaremos.

Extremos locales Sea $f: I\to\mathbb{R}$ función definida en el intervalo I.



Decimos que f tiene un máximo (mínimo) local en $c\in I$ si existe un intervalo abierto $(c-\delta, c+\delta)\subset I$ donde f restringida a $(c-\delta, c+\delta)$ tiene máximo en c. (mínimo).

Teo Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivable en el intervalo abierto (a,b).
Si f tiene un máximo o mínimo local en $c\in(a,b)$ $\Rightarrow$ $f'(c)=0$

(ojo! $f'(c)=0 \not\Rightarrow$ f tiene extremo local en c).

dem Sabemos $f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$.

Supongamos que f tiene máximo local en c. $\Rightarrow \exists\ (c-\delta, c+\delta)\subset(a,b)$

donde f tiene máximo en c: o sea $f(x)\le f(c)$, $\forall x\in(c-\delta,c+\delta)$.

Cuando $0<h<\delta$, $\Rightarrow$ $c<c+h<c+\delta$ $\Rightarrow$ $f(c)\geq f(c+h)$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le \frac{f(c)-f(c)}{h} = 0$$

$h\to 0^+ \downarrow$

$f'(c)$ por definición $\Rightarrow$ $f'(c)\le 0$.

Cuando $-\delta < h < 0 \Rightarrow c-\delta < c+h < c \Rightarrow f(c+h) \leq f(c)$ máximo.

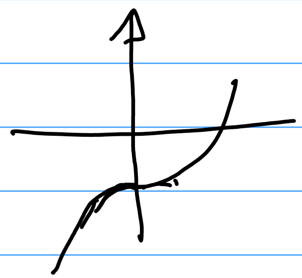
$$\Rightarrow \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \underbrace{\frac{1}{h}}_{<0} \cdot \overbrace{(f(c+h)-f(c))}^{\leq 0} \geq 0$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \xrightarrow{h \to 0^-} f'(c) \quad \Rightarrow \quad f'(c) \geq 0$$

Así que $0 \leq f'(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0$.

Ej. Hallar extremos relativos de $f(x) = x^3 - 1$. Si los tiene, están en puntos x tal que $f'(x) = 0$. $f'(x) = 2x^2 = 0 \iff x = 0$.

$f(0) = -1$.



En cualquier $(-\delta, \delta)$.

$f(x) < -1$ si $x < 0$

$f(x) > -1$ si $x > 0$. $\Rightarrow$ f no tiene extremos locales.