la clase pasada probamos

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos(a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}(a)\cos(b).$$

lo que queremos ver es que $\begin{cases} \operatorname{sen}' = \cos \\ \cos' = -\operatorname{sen}. \end{cases}$

<u>Teorema</u> las funciones $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son derivables y

$$\begin{cases} \operatorname{sen}'(x) = \cos(x) \\ \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

<u>dem</u> $\operatorname{sen}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}$ si este límite existe. tenemos que ver que este límite existe y vale $\cos(x)$.

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(z)}{h} = \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(h) + \operatorname{sen}(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)}{h} =$$

$$= \cos(x)\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 1} + \operatorname{sen}(x)\underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

si supiéramos esos límites, ya está.

Si supiéramos $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$ y $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$, la prueba de $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ estaría terminada. Estos dos límites los vamos a estudiar enseguida. Por ahora asumamos que los conocemos de modo que tenemos la prueba de $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$.

Para ver $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, usamos regla de la cadena.

Sabemos $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/2) = \operatorname{sen}(f(x))$ donde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x + \pi/2$.

Por regla de la cadena: 1) Como $\cos = \operatorname{sen} \circ f$ y sen es derivable, f es derivable ($f'(x) = 2$) $\Rightarrow$

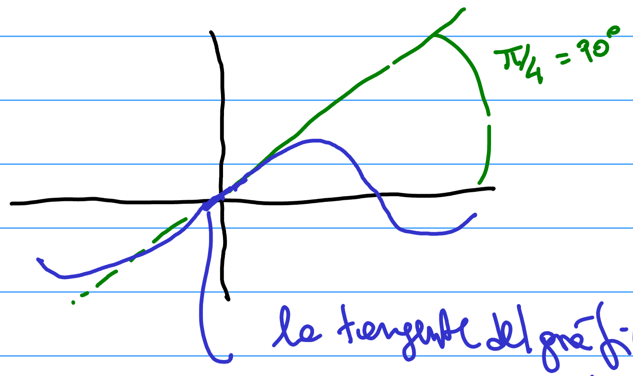
$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable.

2) $\cos'(x) = f'(x) \cdot \operatorname{sen}'(f(x)) = 1 \cdot \cos(f(x))$

$= \cos(x + \pi/2) = \operatorname{sen}(x + \pi/2 + \pi/2) = \operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x)$.

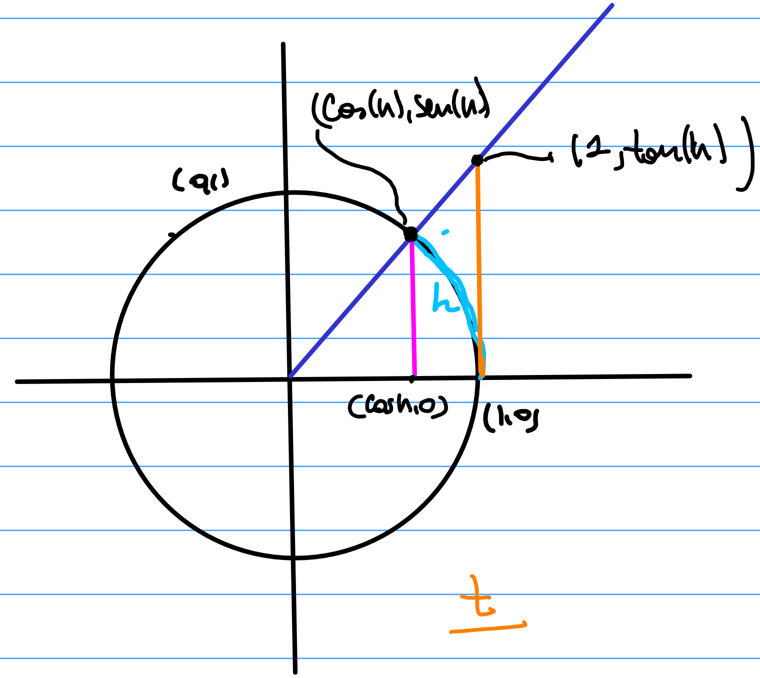
Ahora queremos ver que $\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$

Este límite es $\text{sen}'(0)$ pues $\text{sen}'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(0+h) - \cancel{\text{sen}(0)}^{\,0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}.$

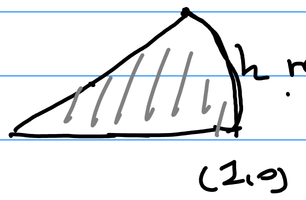


la tangente del gráfico de sen en 0 es 1

Lema $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1.$



Área del sector de círculo

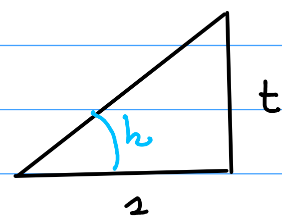


¿Cuántos arcos de largo h entran en la circunferencia?

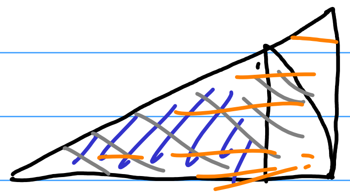
$$\text{largo de la circunferencia}/h = \frac{2\pi}{h}.$$

$$\text{Así que } \underset{\substack{\shortparallel \\ \pi}}{\text{área del círculo}} = \text{área del sector} \cdot \frac{2\pi}{h}$$

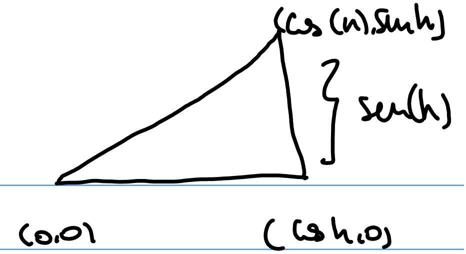
$$\Rightarrow \text{área del sector} = \frac{\pi}{2\pi/h} = \frac{h}{2}$$



$$\tan(h) = \frac{t}{1} = t$$

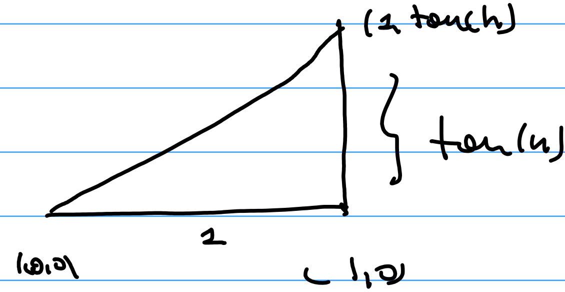


área del triángulo chico:



$$\frac{1}{2}\cos(h)\,\text{sen}(h).$$

área del triángulo grande:



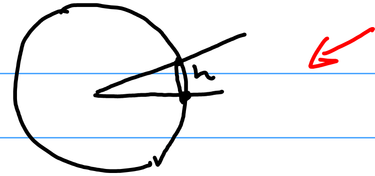
$$\frac{1}{2}\tan(h) = \frac{1}{2}\frac{\text{sen}(h)}{\cos(h)}$$

Así que: área triángulo chico < área sector de círculo < área triángulo grande

$$\frac{1}{2}\cos(h)\,\text{sen}(h) < \frac{h}{2} < \frac{1}{2}\frac{\text{sen}(h)}{\cos(h)}.$$

$$\boxed{\cos(h)\,\text{sen}(h) < h < \frac{\text{sen}(h)}{\cos(h)}} \quad (*)$$

Como queremos calcular $\lim_{h\to 0}$, podemos asumir que h está cerca de 0. Así que para este h, $\cos(h)$ está cerca de 1 $\Rightarrow$ $0 < \cos(h)$.



Primero vamos a calcular $\lim\limits_{h\to 0^+}$, así que asumimos $h>0$.

(*) es
$$\begin{cases} \cos(h)\,\mathrm{sen}(h) < h \iff \dfrac{\mathrm{sen}(h)}{h} < \dfrac{1}{\cos(h)} \\[2ex] h < \dfrac{\mathrm{sen}(h)}{\cos(h)} \iff \cos(h) < \dfrac{\mathrm{sen}(h)}{h}. \end{cases}$$

(usé $h>0$, $\cos(h)>0$ porque no se den vuelta los $<$)

$$\iff \underbrace{\cos(h)}_{\substack{\downarrow h\to 0^+ \\ \cos(0)=1}} < \frac{\mathrm{sen}(h)}{h} < \underbrace{\frac{1}{\cos(h)}}_{\substack{\downarrow h\to 0^+ \\ \frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{1}=1}}$$

Entonces $\dfrac{\mathrm{sen}(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 1$.

Falta ver $\dfrac{\mathrm{sen}(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0^-]{} 1$. | Pero $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\mathrm{sen}(h)}{h} \overset{h=-k}{=} \lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{\mathrm{sen}(-k)}{-k} = \lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{-\mathrm{sen}(k)}{-k}$

$= \lim\limits_{k\to 0^+} \dfrac{\mathrm{sen}(k)}{k} = 1$ como ya calculamos.

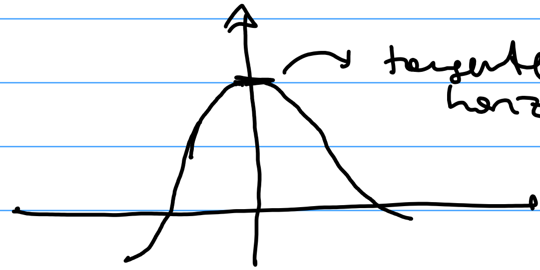
Así que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{sen(h)}{h} = 1 = \lim_{h\to 0^-} \frac{sen(h)}{h} \Rightarrow \exists \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} = 1.$

Lema $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0.$

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{\cos(0+h)-\cos(0)}{h}.$$

El lema dice $\cos'(0) = 0$.

osea



dem Usamos el lema sobre $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{sen\, h}{h} = 1.$

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{(\cos(h)+1)(\cos(h)-1)}{(\cos(h)+1)\,h}.$$

como h está cerca de $0 \Rightarrow$ $\cos(h) > 0$
$\Rightarrow \cos h + 1 > 1$

$$= \frac{\cos(h)^2 - 1}{(\cos h + 1)\,h} = \frac{-\,sen(h)^2}{(\cos h + 1)\,h}$$

$\boxed{1 = \cos^2 + sen^2}$

$$= -\underbrace{\frac{\overset{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}{sen(h)}}{\underset{\downarrow h\to 0\; 2}{\cos h + 1}}}_{\downarrow h\to 0\; 0} \cdot \underbrace{\frac{sen(h)}{h}}_{\downarrow h\to 0\; 1} \xrightarrow[h\to 0]{} -0 \cdot 1 = 0.$$