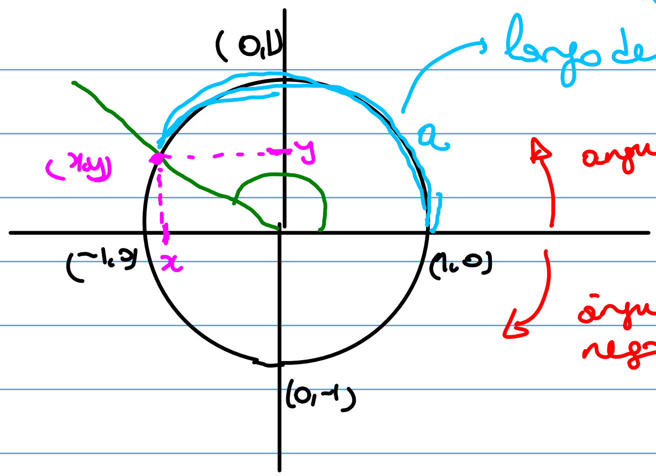


longo del arco = medida del ángulo en radianes.

$\operatorname{sen}(a) = y$

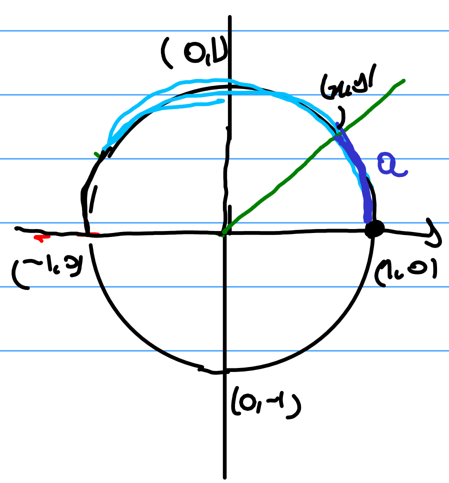
$\cos(a) = x$

Como sen(a) es la segunda coordenada de un punto en la circunferencia de centro (0,0) y radio 1

$\Rightarrow \quad -1 \leq \operatorname{sen}(a) \leq 1$

Como cos(a) es la primera coordenada de un punto en la circunferencia de centro (0,0) y radio 1

$\Rightarrow \quad -1 \leq \cos(a) \leq 1$



$\operatorname{sen}(0) = 0$

$\cos(0) = 1$

La circunf. tiene longo 2π, partiendo de (x,y) en la circunf. si recorro un longo de 2π en antihorario, vuelvo a (x,y).

Entonces $\operatorname{sen}(a) = y = \operatorname{sen}(a+2\pi)$

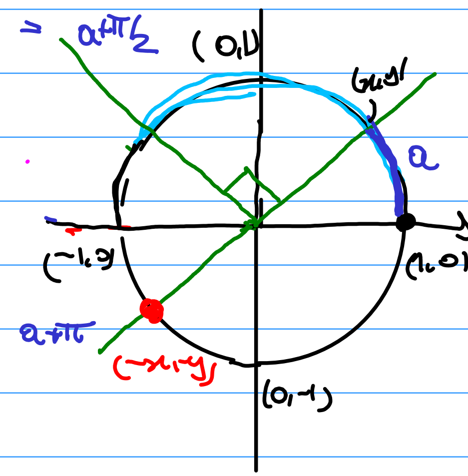
$\cos(a) = x = \cos(a+2\pi)$.

Similarmente, si recorro el círculo en un ángulo de -2π radianes, vuelvo al mismo punto $\rightarrow$

$$\text{sen}(a) = \text{sen}(a - 2\pi)$$
$$\cos(a) = \cos(a - 2\pi)$$

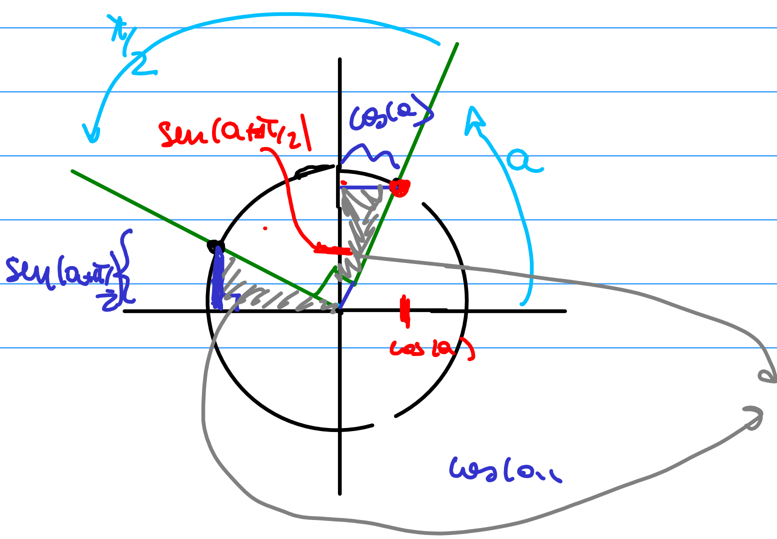
$180^\circ \leftrightarrow \pi$

Recordar que $90^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$



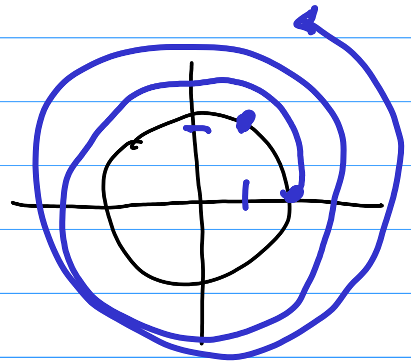
$$\text{sen}(a+\pi) = -y = -\text{sen}(a)$$
$$\cos(a+\pi) = -x = -\cos(a)$$

Lema $\cos(a) = \text{sen}(a + \pi/2)$, equivalentemente, $\text{sen}(a) = \cos(a - \pi/2)$



Estos dos triángulos son iguales $\Rightarrow$ los lados tienen mismo largo $\Rightarrow \cos(a) = \text{sen}(a+\pi/2)$.

Tenemos para cada número real a tenemos dos números $\begin{cases} \operatorname{sen}(a) \\ \cos(a) \end{cases}$



Estas son dos funciones

$\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$-1 \leq \operatorname{sen}(a) \leq 1$

$-1 \leq \cos(a) \leq 1$

<u>Def</u> $\tan(a) = \dfrac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)}$ si $\cos(a) \neq 0$.

¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ vale $\cos(a) = 0$?

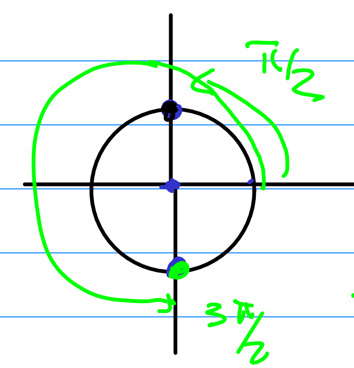
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

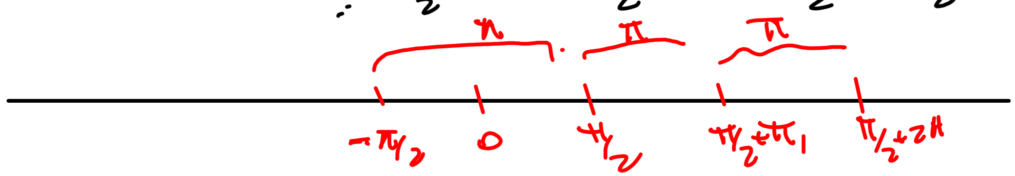
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$n \in \mathbb{Z}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \pm \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$



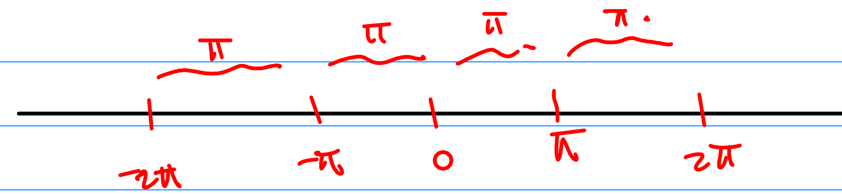
Así que cos vale 0 en $\ldots \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 3\pi \ldots$



¿Dónde vale 0 sen? $\quad 0 = \operatorname{sen}(a) = \cos(a - \pi/2) \iff a - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$

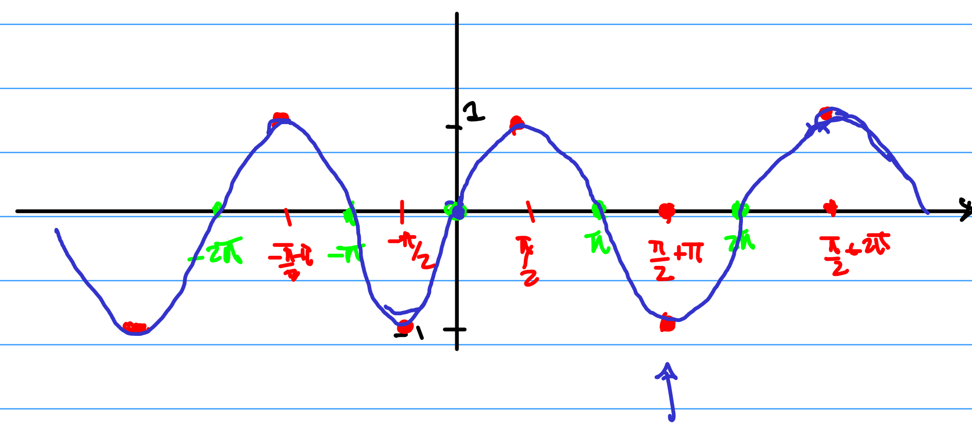
$\iff a = \pi + n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \iff a = m\pi, \; m \in \mathbb{Z}$ (a es múltiplo entero de π).

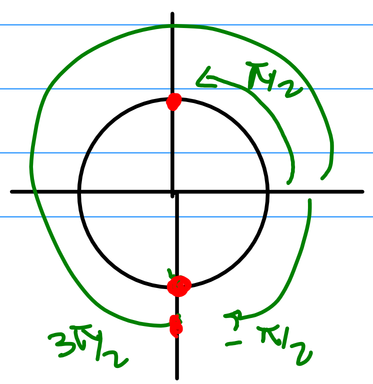
$\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$



Gráficos de sen y cos

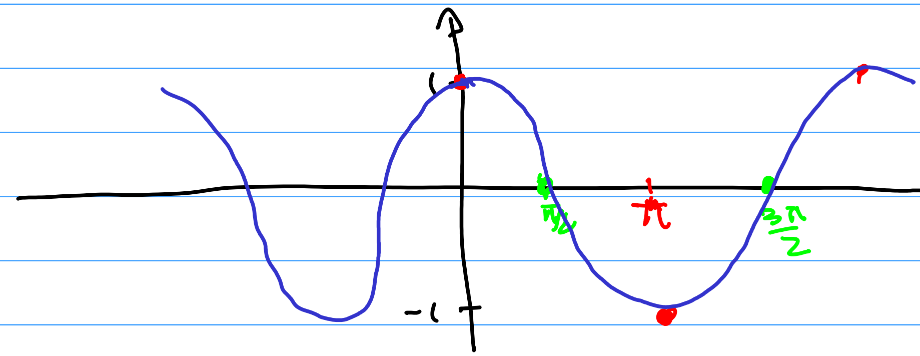
sen

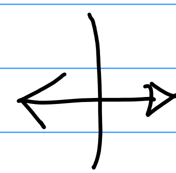




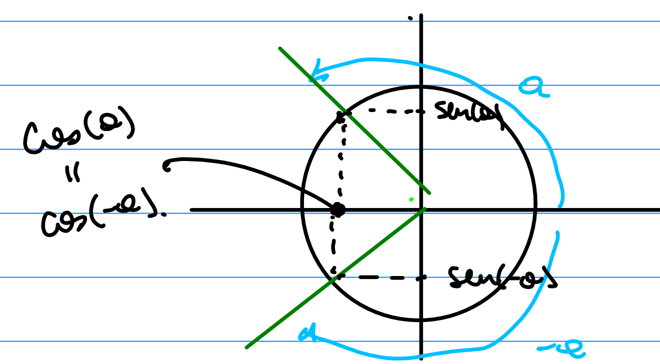
$\operatorname{sen}' = \cos$

Para la gráfica de cos, usamos $\cos(a) = \operatorname{sen}(a + \pi/2)$. Esto quiere decir que la gráfica de cos es igual a la de sen pero "corrida" $\pi/2$ hacia la izq.





Lema
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a) \\ \cos(-a) = \cos(a) \end{cases}$$



$\operatorname{sen}(a+b) \overset{?}{=}$

$\cos(a+b) = ?$

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen}(a)}{h}$$