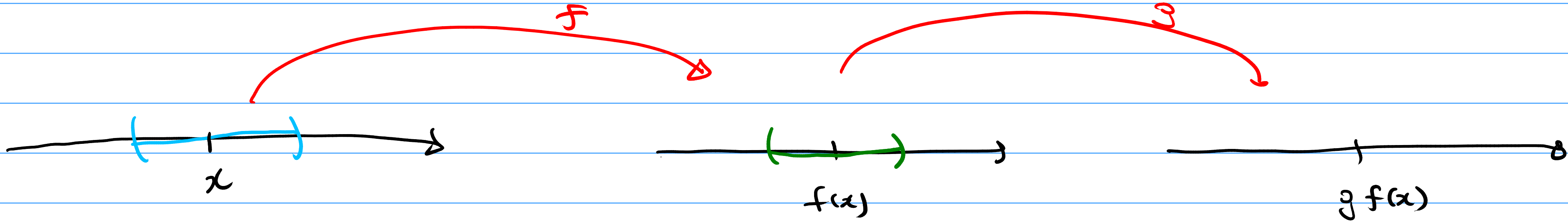
Hemos visto propiedades de las derivadas:

- $(f+g)' = f'+g'$; • $(\lambda f)' = \lambda f'$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$; • $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$ $\quad$ si $g(x) \neq 0$ y $g'(x)$ existe, $f'(x)$ existe.

Estamos viendo la derivada de una composición. ("regla de la cadena")



Si f es continua en x, en particular, si es derivable, existe un intervalo celeste alrededor de x que es enviado por f adentro del intervalo verde.

Entonces tenemos la composición $g \circ f$ en el intervalo celeste.

uno se puede preguntar si existe $(g \circ f)'(x)$

Lema (Regla de la cadena) Si $f'(x)$ y $g'(f(x))$ existen, entonces $(g \circ f)'(x)$ existe y

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

Ej $\quad p(x) = \dfrac{1}{x+a}$ donde $a \in \mathbb{R}$. $\quad \| \;$ p está definida en $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$

$= (-\infty, -a) \cup (-a, +\infty)$

$f(x) = x + a$

$g(x) = 1/x$

$$p(x) = g(f(x)) \left(= \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x+a} \right)$$

$$p'(x) = f'(x)\, g'(f(x)) = 1 \cdot -\frac{1}{f(x)^2} = -\frac{1}{(x+a)^2}$$

$f'(x) = 1$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$sen, cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{sen'(x) = cos(x) \qquad cos'(x) = -sen(x)}$$

Ej $f(x) = \dfrac{1}{(cos(2x))^2}$

$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f(x) = g(cos(2x)) = g(cos(r(x)))$

$r(x) = 2x$

$\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R} \xrightarrow{cos} \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} - \{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x$

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = \underbrace{f'(x)} \underbrace{g'(f(x))}}$$

Como $f(x) = (g \circ (cos \circ r))(x) \overset{\text{cadena}}{=} (cos \circ r)'(x) \cdot g'((cos \circ r)(x))$

$\overset{\text{cadena}}{=} r'(x) \cdot cos'(r(x)) \cdot g'((cos \circ r)(x))$ (*)

$r(x) = 2x \Rightarrow r'(x) = 2$; $cos'(r(x)) = -sen(2x)$;

$g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $g'(x) = -2 \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

$\Rightarrow$

$(*)$ $\quad 2 \cdot (-\text{sen}(2x)) \cdot \frac{-2}{(\cos(2x))^3} = 4 \cdot \frac{\text{sen}(2x)}{(\cos(2x))^3}$.

Ej: $\quad f(x) = (2x^2+3)^3$

$f(x) = 2x^2+3$

$g(x) = x^3$

$\Rightarrow f(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$f'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = 4x \cdot g'(2x^2+3) = 4x \cdot 3(2x^2+3)^2$

$= 12x \cdot (4x^4 + 9 + 12x^2) =$

$= 12(4x^5 + 12x^3 + 9x)$

$\boxed{f'(x) = 4x}$ $\quad \boxed{g'(x) = 3x^2}$

Idea de porqué vale la regla de la cadena.

Si fuéramos a calcular $(g\circ f)'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)}{h}$,

podríamos considerar

$$\frac{(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} \text{ `` = ''}$$

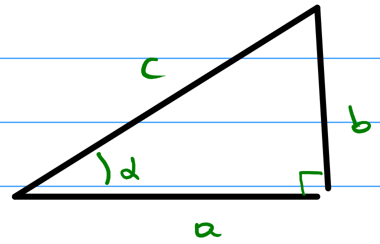
$$= \underbrace{\frac{g(\overbrace{f(x+h)}^{y+k}) - g(\overbrace{f(x)}^{y})}{\underbrace{f(x+h)}_{y+k} - \underbrace{f(x)}_{y}}}_{\xrightarrow{h\to 0}\ g'(f(x))} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si $f(x+h) - f(x)$ no se hace 0.

$\xrightarrow{h\to 0} f'(x)$

$\xrightarrow{h\to 0} g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Seno, coseno, tangente.

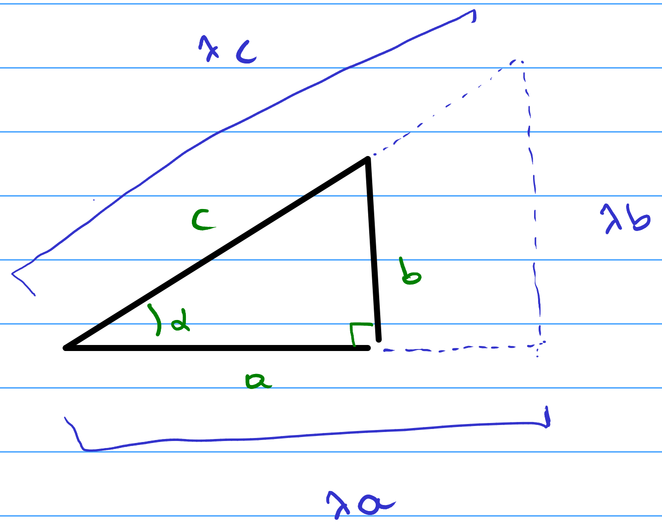


$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

$\lambda > 0$

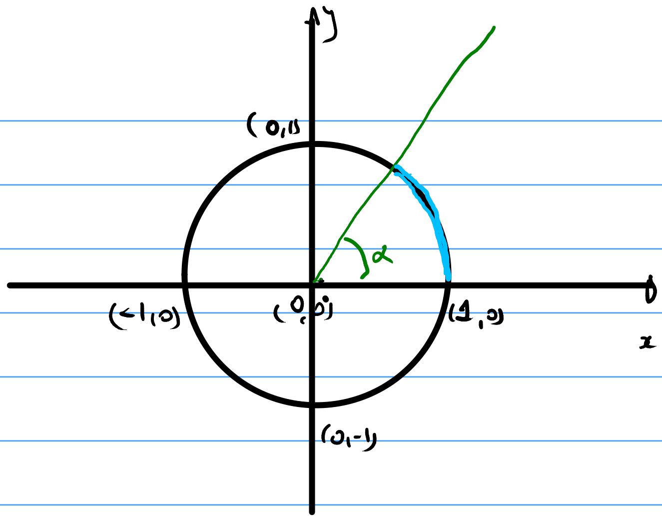


$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\lambda b}{\lambda c} = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\lambda a}{\lambda c} = \frac{a}{c}$$

"No importa el tamaño del triángulo para calcular sen, cos, tan!"

Radianes



Círculo de centro (0,0)
y radio 1

La circunferencia tiene largo 2π.
Al ángulo α lo identifico con el largo del arco celeste.
Ese largo es la medida de α en radianes.

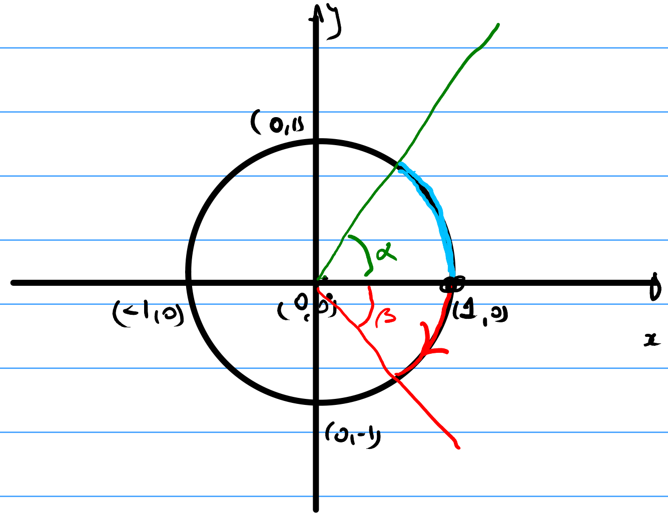
$360° \rightsquigarrow 2\pi$

$180° \rightsquigarrow \pi$

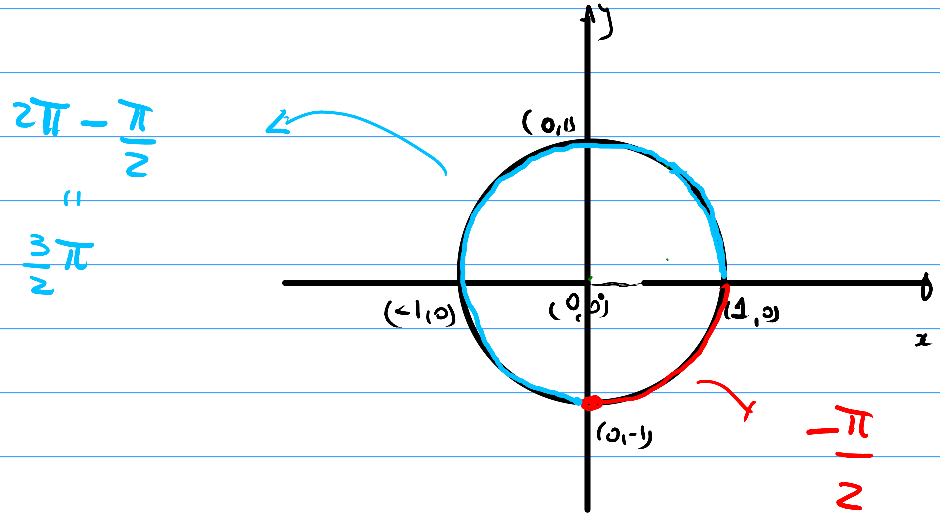
$90° \rightsquigarrow \frac{\pi}{2}$

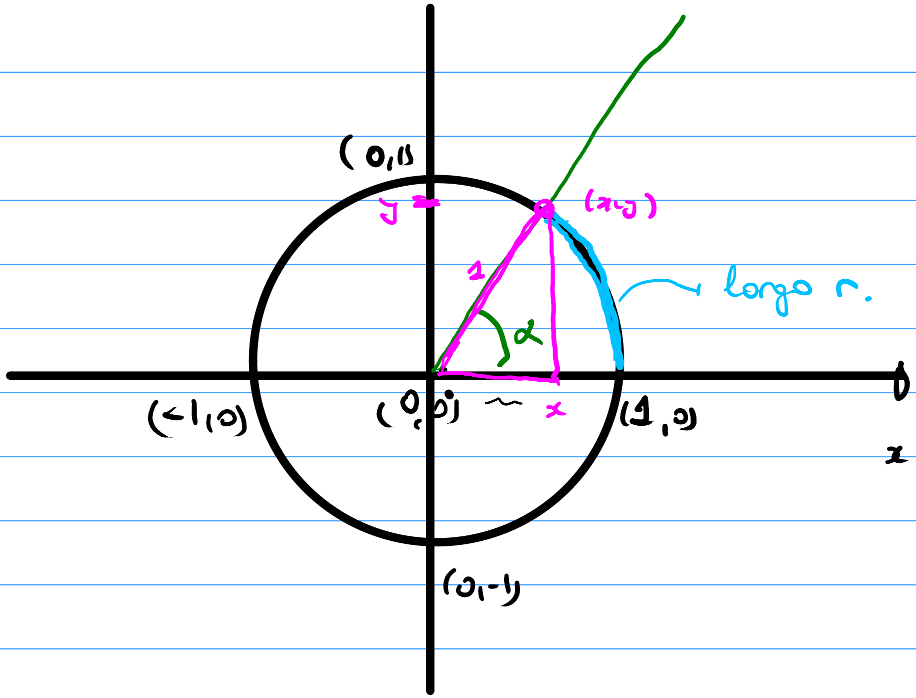
$45° \rightsquigarrow \pi/4$

$$60° = \frac{360°}{6} \rightsquigarrow \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$



β en radianes va a ser negativo pues de (1,0) me muevo en sentido de las agujas del reloj.





Definición:

$$\operatorname{sen}(r) = y$$

$$\cos(r) = x$$