Estamos viendo propiedades de las derivadas.

- $(f+g)' = f' + g'$; $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $(\lambda f)' = \lambda f'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$; si $g'(x)$ existe y $g(x) \neq 0$, entonces $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$.

Derivada de f/g.

Si g es una función que cumple: $g'(x)$ existe y $g(x) \neq 0$,
y f es una función t.q. $f'(x)$ existe, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$ existe

y $$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}}$$

f/g es la función que vale $\frac{f(a)}{g(a)}$ si $g(a)$ y $f(a)$ están definidos y $g(a) \neq 0$

o sea $f/g = f \cdot 1/g$

formula derivada del producto

¿Porqué vale? $\left(f/g\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) \overset{\uparrow}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g}(x) + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x)$

$$= f'(x)\,\frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}.$$

Ej $f(x) = x^2+1$, $g(x) = 3x^4-2x = x\,(3x^3-2)$

$g(x)=0$ si $x=0$ ó $\underbrace{3x^3-2=0}_{\Updownarrow}$ Así que $\frac{f}{g}$ está definido en todo $x \in \mathbb{R}$

$x^3 = 2/3$ menos $x=0$ y $x = \sqrt[3]{2/3}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2} = \frac{2x\,\overbrace{x(3x^3-2)}^{g(x)} - (x^2+1)\overbrace{(12x^3-2)}^{g'(x)}}{x^2\,(3x^3-2)^2}.$$

Ej Hallar la derivada de la función con fórmula $\frac{2x}{x+4}$.

$\frac{f}{g}$ con $f(x) = 2x$, $g(x) = x+4$.

$\frac{f}{g}$ está definida en x excepto si $x=-4$. Dominio de $\frac{f}{g}$ es $\mathbb{R}-\{-4\}$
$=(-\infty,-4)\cup(-4,+\infty)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2} = \frac{2(x+4) - 2x\cdot 1}{(x+4)^2} =$$

Ej ¿Cuál es pendiente de la curva $y=\frac{t}{t+5}$ en el punto $t=2$ $\left(y=\frac{2}{7}\right)$.

La curva es el gráfico de $f(t)=t/_{t+5}$. La pendiente va a ser $f'(2)$,

$$f'(t) = \frac{(t)'(t+5) - t\,(t+5)'}{(t+5)^2} = \frac{1(t+5) - t\cdot 1}{(t+5)^2} = \frac{5}{(t+5)^2}$$

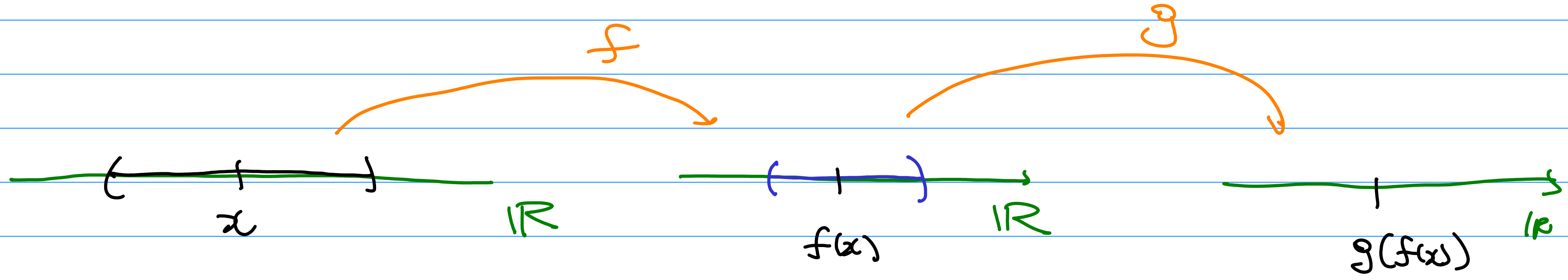
$$f'(2) = \frac{5}{7^2}.$$

Cuál es la ecuación de la recta tangente en $t=2$?

$y = f'(2)x + b$ y sabemos que $(2, f(2))$ está en la recta.

$\Rightarrow f(2) = f'(2)\cdot 2 + b \Rightarrow b = f(2) - f'(2)\cdot 2 = \frac{2}{7} - \frac{5}{7^2}\cdot 2 = \frac{2}{7}\left(1-\frac{5}{7}\right).$

Derivada de una composición, o "regla de la cadena".



- Para poder hablar de $f'(x)$, f tiene que estar definida en un intervalo abierto alrededor x.

- Para poder hablar de $g'(f(x))$, g tiene que estar definida en un intervalo alrededor de $f(x)$.

La composición de f y g es la función que en un x vale $g(f(x))$.

Se escribe $g \circ f$ (composición de f con g).

Para poder hablar de $(g\circ f)'(x)$, $g\circ f$ tiene que estar definida

$g \circ f$ tiene que estar definida en un intervalo abierto alrededor de x

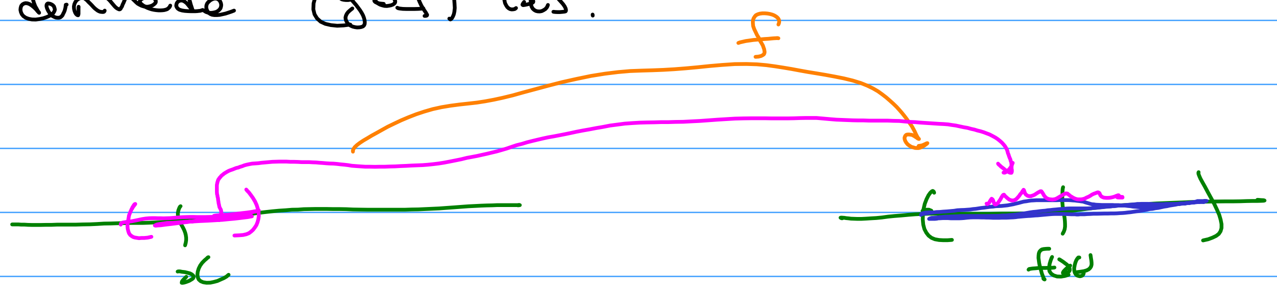
$\Updownarrow$

g tiene que estar definida en $f(a)$, para a en un intervalo alrededor de x.

Si g está definida en $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$ y f es continua en x $\left(\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)\right)$ entonces existe $(x-\delta, x+\delta)$ con

$$f(a) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \text{ si } a \in (x-\delta, x+\delta)$$

o sea $g \circ f$ está definida en $(x-\delta, x+\delta)$, y podemos hablar de la derivada $(g\circ f)'(x)$.



$x+h \in (x-\delta, x+\delta)$.

verdad pues: $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ es decir que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ con $f(x+h) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$ si $\underbrace{-\delta < h < \delta}$

La regla de la cadena dice:

<u>Lema</u> Si - f está definida en un intervalo alrededor de x
- g " " " " " " $f(x)$.
- $f'(x)$ y $g'(f(x))$ existen

Entonces $(g\circ f)'(x)$ existe y es $\boxed{(g\circ f)'(x) = f'(x)\cdot g'(f(x))}$

<u>Ej</u> $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $f'(x)$ existe. ¿Cuál es la derivada de $w(x) = f(x)^2$?

$w = g\circ f$ donde $g(x) = x^2$ $\qquad g(f(x)) = f(x)^2 = w(x)$.

$w'(x) = f'(x)\, g'(f(x)) = f'(x)\, 2f(x)$ $\qquad \boxed{g'(x) = 2x}$

$= 2\,f'(x)\, f(x)$

<u>Ej</u> Luego vamos a ver la función $\text{sen}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad \text{sen}' = \cos$

$\cos: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Podemos calcular la derivada de $(\text{sen}(x))^4$

Esa función es $g(f(x))$ donde $f(x) = \text{sen}(x)$

$g(x) = x^4$

$(g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x)) = \cos(x)\, 4\, \text{sen}(x)^3 = 4 \cos(x)\, \text{sen}(x)^3.$

Ej Derivada de $\dfrac{x+1}{\text{sen}(2x)}$ en los x donde $\text{sen}(2x) \neq 0$

$\dfrac{f}{h \circ g}(x)$ donde $f(x) = x+1$, $g(x) = 2x$, $h(x) = \text{sen}(x)$

o sea, $\dfrac{f}{\text{sen} \circ g}(x)$. 1) derivada de un cociente: $\left(\dfrac{f}{\text{sen} \circ g}\right)'(x) =$

$$= \frac{f'(x) \cdot \text{sen}(g(x)) - f(x) \cdot (\text{sen} \circ g)'(x)}{(\text{sen} \circ g)(x)^2} =$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = 1 \checkmark \\ (\text{sen} \circ g)'(x) = g'(x) \cdot \text{sen}'(g(x)) = 2 \cdot \cos(2x) \end{array}\right]$$

$$= \frac{\text{sen}(2x) - (x+1)\, 2 \cos(2x)}{\text{sen}(2x)^2}$$