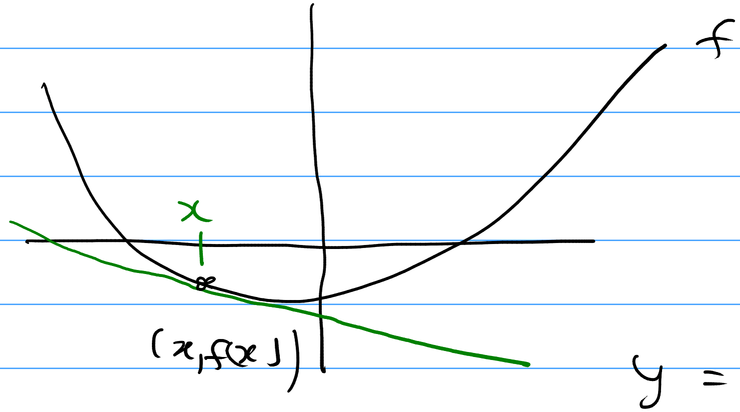
Recordemos



$$y = \underbrace{a}\, x + b$$

pendiente $= f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vimos algunas propiedades:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ $\qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

  (si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen)

- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ $\qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

  si $f'(x)$ existe. $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Vimos que si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = n x^{n-1}$ $(n \geq 1)$.

<u>Derivada de un polinomio:</u> Una función polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una que tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números reales (fijos).

Ej, $f(x) = 2x^4 + \cancel{0x^3} - x^2 + 10x + 1$

<u>Lema</u> Si f es como arriba, $f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1$

(para recordar: $f(x) = a_n x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x^{1} + \cancel{a_0}$)

$x^0 = 1$

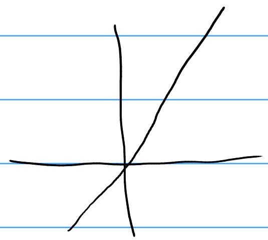
Esto es así pues $\left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0\right)'$

$$= (a_n x^n)' + (a_{n-1} x^{n-1})' + \cdots + (a_1 x)' + a_0'$$

$$= a_n (x^n)' + a_{n-1} (x^{n-1})' + \cdots + a_1 \underbrace{(x)'}_{=1} + \underbrace{a_0'}_{=0}$$

$$= a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_1$$

[Si $f(x) = c \ \forall c$, entonces $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$]



$f(x) = x \ \forall x$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \xrightarrow[h \to 0]{} 1$$ así que $f'(x) = 1$

Ej:

$$f(x) = 2x^4 - x^2 + 10x + 1.$$

$$f'(x) = 2 \cdot 4x^3 - 2x + 10.$$

$$= 8x^3 - 2x + 10.$$

Derivada de un producto

Si f y g funciones, su producto fg es la función

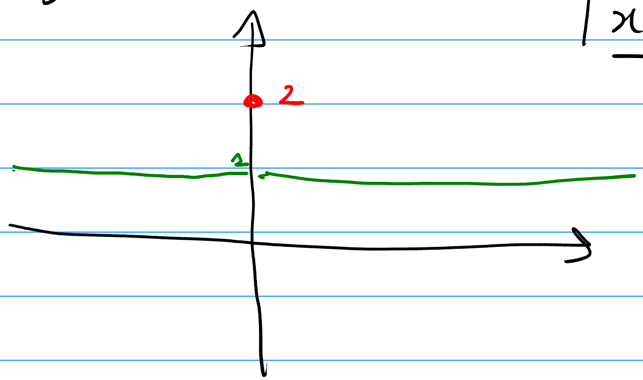
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

No vale $(fg)' = f'g'$!!

Obs Si $f'(x)$ existe, entonces $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.

(se dice que f es continua en x)

Ej.



$\boxed{x=0}$

$$f(\underbrace{0+h}_{\neq 0}) = f(h) = 1 \qquad h \neq 0.$$

Así que $\exists \lim_{h\to 0} f(h) = 1 \neq 2 = f(0)$

Así que f no es continua en 0.

Porqué? Sabemos que $\exists f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\boxed{f(x+h)-f(x)} = \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)} \cdot \underbrace{h}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)\cdot 0 = 0$$

Así que $f(x+h)-f(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ o lo que es lo mismo

$$f(x+h) \underset{h\to 0.}{\longrightarrow} f(x)$$

" los gráficos de las funciones derivables no tienen saltos ".

Lema Si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces $(fg)'(x)$ existe y

$$\boxed{(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).}$$

Porqué?

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x+h) \overbrace{- f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h)} - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \cdot \boxed{g(x+h)} + f(x) \boxed{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}$$

$h \to 0$, $h \to 0$ obs , $h \to 0$

$$\xrightarrow{h \to 0} f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

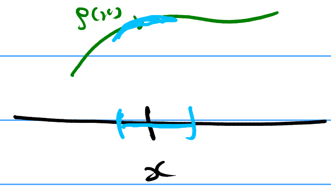
Eg $\quad f(x) = (x+1) \cdot x^3$

$$f'(x) = (x+1)'\,x^3 + (x+1)\,(x^3)'$$

$$= 1 \cdot x^3 + (x+1)\,3x^2 = x^3 + 3x^3 + 3x^2 = 4x^3 + 3x^2$$

Derivada de un cociente

Si g es una función continua en x $\left[\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x) \right]$ (por ejemplo, si $g'(x)$ existe) y $g(x) \neq 0$, entonces g no vale nunca 0 en un entorno de x.

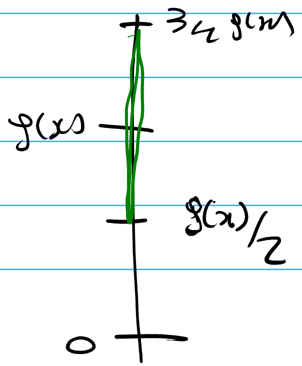


$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ significa que dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tq si

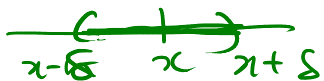
$$-\delta < h < \delta \Rightarrow \underbrace{|g(x+h) - g(x)| < \varepsilon}_{g(x)-\varepsilon < g(x+h) < g(x)+\varepsilon}$$

Tomo $\varepsilon = g(x)/2$. Así que $\exists\, \delta > 0$ tq $\underbrace{-\delta < h < \delta}$ $\Rightarrow \overbrace{g(x) - \frac{g(x)}{2}}^{g(x)/2} < g(x+h)$

$$< g(x) + \frac{g(x)}{2} = \frac{3}{2} g(x)$$



Así que $g(x+h) \neq 0$ si $-\delta < h < \delta$.



Por lo anterior, si g es continua en x y $g(x) \neq 0$, podemos definir $1/g$ en un entornito de x.

$$\frac{1}{g}(x+h) = \frac{1}{\underset{\neq 0}{g(x+h)}} \quad \text{si } h \text{ es suficientemente chico}$$

<u>Lema</u> Sea g una función tq $g'(x)$ existe y $g(x) \neq 0$.

[Como $g'(x)$ existe $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} g \text{ es continua en } x \\ g(x) \neq 0 \end{array}\right) \Rightarrow \frac{1}{g}$ está definida alrededor de x]

Entonces $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)$ existe y es $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$

¿Por qué?

$$\frac{\frac{1}{g}(x+h) - \frac{1}{g}(x)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}$$

$$= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{h} = \frac{1}{\underbrace{g(x+h)g(x)}_{g(x)}} (-1) \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} \xrightarrow[h \to 0]{}$$

$$- \frac{g'(x)}{g(x)^2} .$$

Ej $g(x) = \frac{1}{x+1}$ lo habíamos calculado con la definición.

Usando la fórmula: $g'(x) = - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} = - \frac{1}{(x+1)^2}$ $\boxed{x \neq -1}$

Ej $g(x) = \frac{1}{x^2}$, si $x \neq 0$, $g'(x) = - \frac{(x^2)'}{(x^2)^2} = - \frac{2x}{x^4}$

$$= -2/x^3$$

Eg

$$g(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad n \geq 1, \quad g'(x) = -n\, x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^n} \Rightarrow g'(x) = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$$