Hemos visto: definición de derivada. Es un límite particular. Entonces recordamos algunas propiedades de los límites.

- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ puede existir o no.

- propiedades de límites: – " $\lim_{h\to 0} F(h)+G(h) = \lim_{h\to 0} F(h) + \lim_{h\to 0} G(h)$ "

  – si $\lambda \in \mathbb{R}$, " $\lim_{h\to 0} \lambda F(h) = \lambda \lim_{h\to 0} F(h)$ "

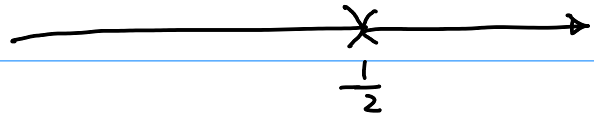
  – si $\lim_{h\to 0} G(h) \neq 0$ entonces " $\lim_{h\to 0} \frac{F(h)}{G(h)} = \lim_{h\to 0} F(h) / \lim_{h\to 0} G(h)$ ".

  – " $\lim_{h\to 0} F(h)G(h) = \lim_{h\to 0} F(h) \lim_{h\to 0} G(h)$ ".

Ejemplo $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$ este cociente no está definido si $2x+1=0$

o sea si $x = -1/2$. El dominio de f es

$$\mathbb{R} - \left\{-\tfrac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, -1/2\right) \cup \left(-1/2, +\infty\right)$$



Calculemos $f'(x)$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{x+h}{2(x+h)+1} - \dfrac{x}{2x+1}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(2x+1) - x\left(2(x+h)+1\right)}{\left(2(x+h)+1\right)(2x+1)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}} \frac{\cancel{2x^2} + \cancel{2xh} + \cancel{x} + \cancel{h} - \left[\cancel{2x^2} + \cancel{2xh} + \cancel{x}\right]}{\left(2(x+h)+1\right)(2x+1)} = \frac{1}{\underbrace{\left(2(x+h)+1\right)}_{\downarrow \; 2x+1}(2x+1)} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{(2x+1)^2}$$

Así que $f'(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$.

Derivadas de potencias Ya vimos que si $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$.

Veamos ahora $f(x)=x^3$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{\cancel{x^3}+3x^2\cancel{h}+3xh^{\cancel{2}\,1}+h^{\cancel{3}\,2}\cancel{-x^3}}{\cancel{h}} = \overbrace{3x^2+3xh+h^2}$$

$$(x+h)^3 = (x+h)\overbrace{(x+h)^2} = (x+h)\overbrace{(x^2+2xh+h^2)} =$$

$$= x^3 + \underbrace{2x^2h} + \overbrace{xh^2} + \underbrace{x^2h} + \overbrace{2xh^2} + h^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 3x^2+3xh+h^2 = \lim_{h\to 0} \overbrace{3x^2}^{\text{constante}} + \lim_{h\to 0} 3xh + \overbrace{\lim_{h\to 0} h^2}^{=0} = 3x^2 + 3x\overbrace{\lim_{h\to 0} h}^{=0} + 0 = 3x^2$$

Teorema si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y $f(x) = x^n$, entonces existe $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) = nx^{n-1}$

[**Obs** caso $n=1$: $f(x) = x$. $f'(x) = 1 \cdot \overbrace{x^0}^{1} = 1$]

"**dem**" $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = \dfrac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}h + g(x,h)h^2 \cancel{- x^n}}{h}$

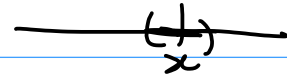
$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \overbrace{g(x,h)}^{\text{expresión con } x \text{ y } h} h^2$$

$$= \overbrace{nx^{n-1}}^{\text{cte}} + g(x,h)h$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} nx^{n-1} + \lim_{h \to 0} g(x,h)h$$

$$= nx^{n-1} + \underbrace{\overbrace{\lim_{h \to 0} g(x,h)}^{\text{existe.}} \overbrace{\lim_{h \to 0} h}^{0}}_{0} = nx^{n-1}$$

Derivada de una suma

Si f y g son funciones definidas alrededor de $x \in \mathbb{R}$ 

y $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces

$(f+g)'(x)$ existe y $\quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$

Recordar que $f+g$ es la función $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

¿Por qué?

$$(f+g)'(x) \xleftarrow{h\to 0} \left[\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}\right] = \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ f'(x)}} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ g'(x)}} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x) + g'(x)$$

Derivada de el múltiplo por un número

Si f es una función definida alrededor de $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, y $f'(x)$ existe, entonces $(\lambda f)'(x)$ existe y

$$(\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

[Recordar que $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$]

¿Porqué?

$$(\lambda f)'(x) \xleftarrow{h\to 0} \left(\frac{(\lambda f)(x+h) - (\lambda f)(x)}{h} \stackrel{def}{=} \frac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x)}{h} = \lambda \underbrace{\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}}_{F(h)} \right.$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow{h\to 0} f'(x)$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \lambda f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \lambda F(h) = \lambda \lim_{h\to 0} F(h)$$

Ahora sabemos cómo derivar **funciones polinomiales**:

Ej $\quad f(x) = 3x^4 + x^2 - 2x - 1$

$$f'(x) = (3x^4)' + (x^2)' + (-2x)' + \underbrace{(-1)'}$$

$$= 3(x^4)' + (x^2)' - 2(x)' + 0$$

$$= 3 \cdot 4x^3 + 2x - 2 \cdot 1$$

$$= 12x^3 + 2x - 2$$

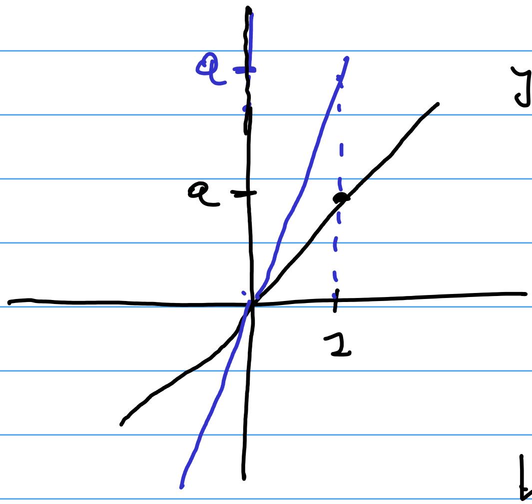
$$\underset{4}{3}\, \overset{3}{x^{4}} + 2 \cdot \overset{1}{x^{2}} - \cancel{2x} \cancel{-1}$$

__Observación__ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante

$f(x) = c \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0 \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Comentarios: las rectas tangentes a gráficas de funciones no son verticales.



$y = ax$.

a = pendiente de la recta

$= f'(x)$ donde $f(x) = ax$.

Cuanto más vertical es la recta $\longleftrightarrow$ a es más grande

La recta vertical $x=0$ no es el gráfico de una función