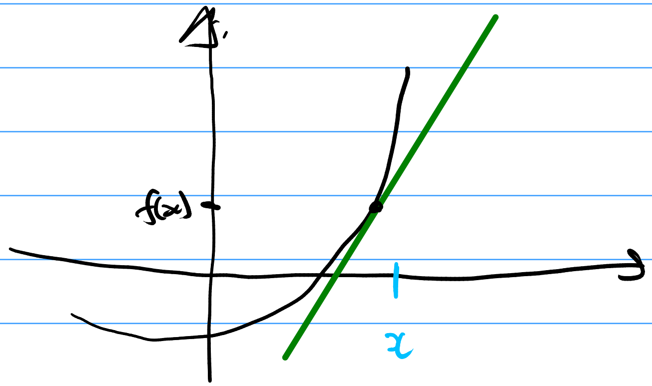
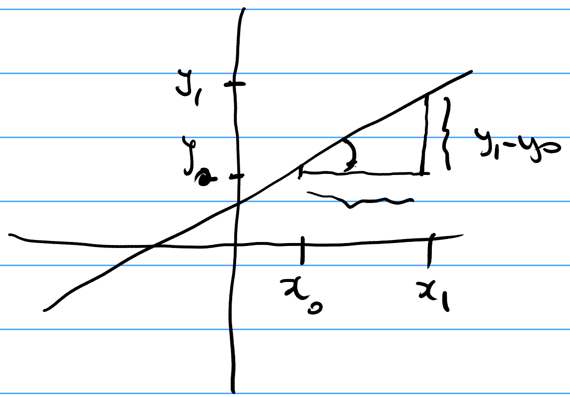
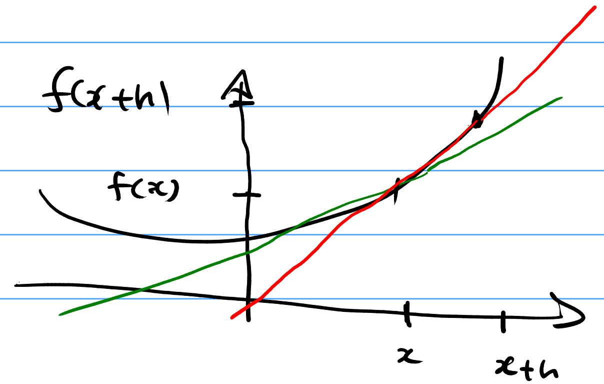


Derivada de la función en x es un número que representa la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en el punto $(x, f(x))$,



En el caso de una recta, la pendiente se calcula : $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ con $x_1 > x_0$

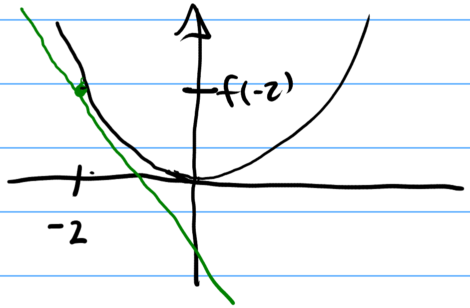
En el caso de una función f



Pendiente de recta roja: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Pendiente de recta tangente (verde): $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

Ej: $f(x)=2x^2$. Encontrar la recta tangente al gráfico de f en $x=-2$



Recta tangente tiene ecuación $\boxed{y = ax+b}$

$(a,b \in \mathbb{R})$. a es pendiente, o sea $f'(-2)$

$$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{2(-2+h)^2 - 2(-2)^2}{h} = 2\cdot\frac{(-2+h)^2-(-2)^2}{h} =$$

$$2 \cdot \frac{\cancel{4} - 4h + h^2 - \cancel{4}}{h} = 2 \cdot \frac{-4h + h^2}{h} = 2 \cdot (-4 + h) \xrightarrow[h \to 0]{} -8$$

Así que $f'(-2) = -8 = a$

Sabemos que la recta pasa $(-2, f(-2)) = (-2, 8)$

Entonces $y = -8x + b$, evaluando en $x = -2$, $y = 8$ tenemos

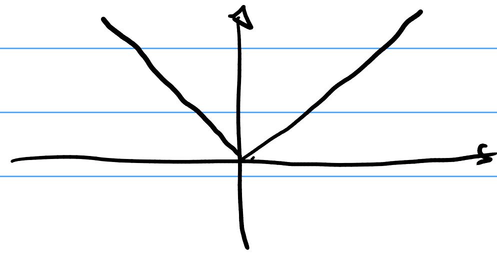
$$8 = -8(-2) + b = 16 + b \Rightarrow \boxed{-8 = b}$$

Así que $y = -8x - 8$ es la recta. ■

<u>Obs</u> $f'(x)$ puede existir para algunos x y no existir para otros.

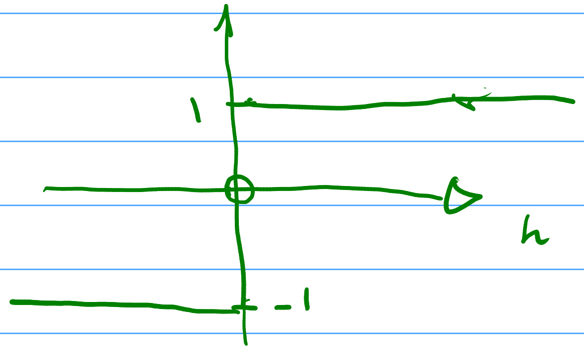
<u>Ej</u>

$$f(x) = |x|$$



No tiene derivada en $x=0$:

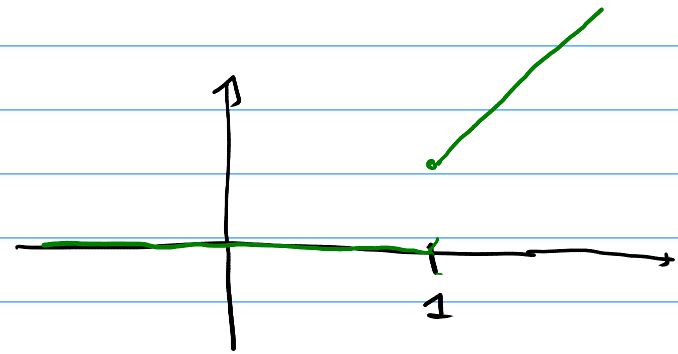
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & \text{si } h>0 \\ \frac{-h}{h} = -1 & \text{si } h<0 \end{cases}$$



El límite $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe

Así que $f'(0)$ no existe.

Ej. $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Hallemos las derivadas por izq y der. en $x=1$

si $h<0$ (por la izq).

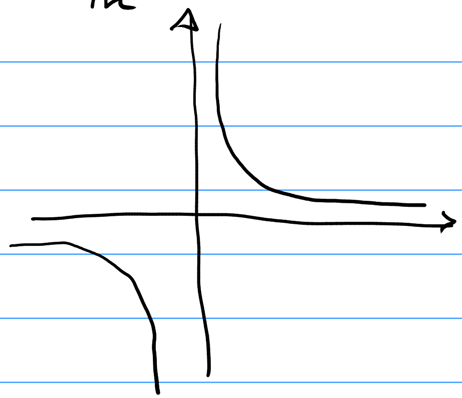
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

Así que el límite $h\to 0^-$ existe y es $\underline{0}$.

si $h>0$ (por la der.)

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1+h-0}{h} = \frac{1+h}{h} = \underbrace{\frac{1}{h}}_{\to +\infty}+1$$

$h \mapsto 1/h$



El límite $h\to 0^+$ no existe.

Recordar $g(x) = 1/x$, $x > 0$ $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

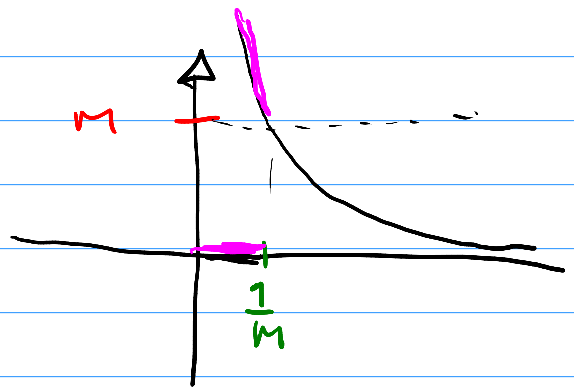
"Cuando x es chico , $1/x$ es grande".

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty}$$. O sea, para cualquier $M > 0$ existe $\delta > 0$ tq si $0 < x < \delta$ entonces $1/x \geq M$

$\Updownarrow$

Así que dado $M > 0$ cualquiera , si $1 \geq xM \iff \frac{1}{M} \geq x$

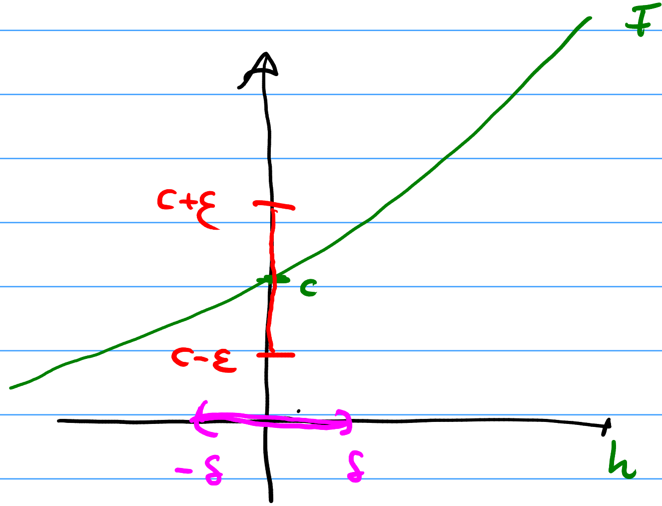
$0 < x \leq \frac{1}{M}$ entonces $\frac{1}{x} \geq M$



Propiedades básicas de límites

$$\lim_{h\to 0} F(h) = c$$

Qué quiere decir esto?



Esto significa

$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ \delta>0$ tal que si

$-\delta < h < \delta$, y $h \neq 0$

entonces $\quad c-\varepsilon < F(h) < c+\varepsilon$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c$$

límite de una suma si F y G son funciones y existen $\lim_{h\to 0} F(h)$ y $\lim_{h\to 0} G(h)$

entonces existe $\lim_{h\to 0} \overbrace{(F+G)(h)}^{F(h)+G(h)}$ y

$$\lim_{h\to 0} \left(F(h)+G(h) \right) = \lim_{h\to 0} F(h) + \lim_{h\to 0} G(h)$$

"límite de suma = suma de límites".

límite del producto por un número si existe $\lim_{h\to 0} F(h)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

Entonces existe $\lim_{h\to 0} \lambda F(h)$ y $\lim_{h\to 0} \lambda F(h) = \lambda \cdot \lim_{h\to 0} F(h)$.

"Números salen para afuera del límite".

limite de un producto Si F y G son funciones la funcion $F \cdot G$ está definido como $(F \cdot G)(x) = F(x)\, G(x)$.

Si existen $\lim\limits_{h \to 0} F(h)$ y $\lim\limits_{h \to 0} G(h)$, entonces existe $\lim\limits_{h \to 0} (F \cdot G)(h)$ y

$$\lim_{h \to 0} (F \cdot G)(h) = \lim_{h \to 0} F(h) \cdot \lim_{h \to 0} G(h).$$

"El limite del producto es el producto de los limite".

limite de una division Si $\lim\limits_{h \to 0} F(h)$ y $\lim\limits_{h \to 0} G(h)$ existen y $\lim\limits_{h \to 0} G(h) \neq 0$

entonces existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(h)}{G(h)}$ y es $\dfrac{\lim\limits_{h \to 0} F(h)}{\lim\limits_{h \to 0} G(h)}$.

Ejemplo $F(h) = \dfrac{2xh+3}{x^2+4h}$ $x \in \mathbb{R}$ fijo.

$$\lim_{h\to 0} 2xh+3 = \lim_{h\to 0} 2xh + 3 = 2x \boxed{\lim_{h\to 0} h} + 3 = 3$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0} h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} (x^2+4h) = x^2 + \lim_{h\to 0} 4h = x^2 + 4\boxed{\lim_{h\to 0} h} = x^2$$

$\boxed{\lim_{h\to 0} h} = 0$

Si $x \neq 0$, este último da $\neq 0$. Así que $\lim_{h\to 0} F(h) = \dfrac{3}{x^2}$

Ej $\lim_{h\to 0} \dfrac{h^2-h}{h^3+2h}$?

$$\frac{h^2-h}{h^3+2h} = \frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}(h^2+2)} = \frac{h-1}{h^2+2} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{-1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ f(x) = x \\ \dfrac{x+h-x}{h} = \dfrac{h}{h} = 1 \end{array}}$$

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{h \to 0} h^2 - h = \lim\limits_{h \to 0} h^2 + \lim\limits_{h \to 0} (-1)\cdot h = \Big(\overbrace{\lim\limits_{h \to 0} h}^{\to 0}\Big)\Big(\overbrace{\lim\limits_{h \to 0} h}^{\to 0}\Big) + (-1)\overbrace{\lim\limits_{h \to 0} h}^{\to 0} = 0 \\[2em]
\lim\limits_{h \to 0} h(h^2+2) = \Big(\overbrace{\lim\limits_{h \to 0} h}^{\to 0}\Big)\overbrace{\lim\limits_{h \to 0} (h^2+2)}^{\text{numero}} = 0
\end{cases}
$$