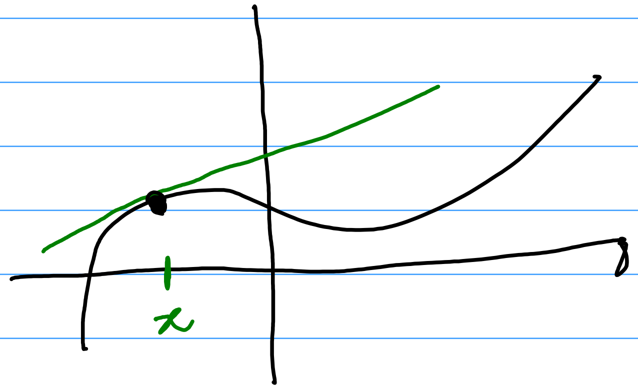
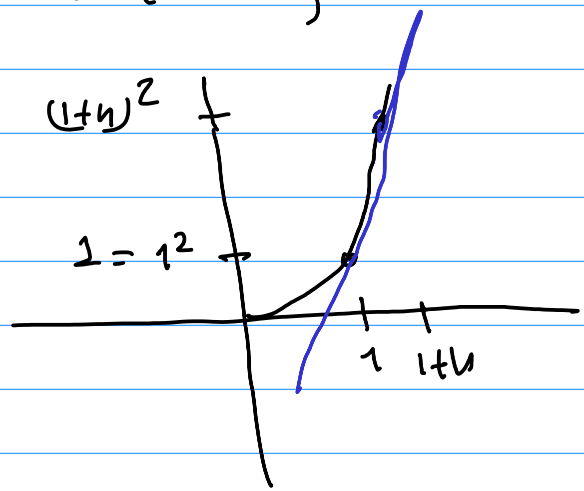


"Derivada de f en x = pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x, f(x))$

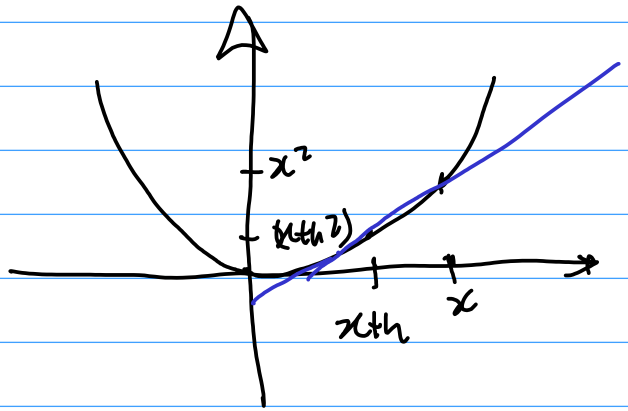


Calculamos la derivada de
$f(x) = x^2$ en 1

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{1+h-1} = \frac{h^2 + 2h + \cancel{1} - \cancel{1}}{h} =$$

$$= h + 2 \xrightarrow[h \to 0]{} 2$$

¡Hagamos lo mismo pero en un x cualquiera en lugar de $x=1$



La pendiente va a ser

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{\cancel{x^2}+h^2+2xh-\cancel{x^2}}{h} =$$

$$= h + 2x \xrightarrow[h\to 0]{} 2x$$

Así que la derivada de f en x es $2x$.

<u>Notación</u> derivada de f en x : $f'(x)$

<u>Definición</u> La derivada de la función f en el punto x

es $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Recordar que el valor de $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ depende solamente

de valores tan chicos como yo quiera de h.

o sea

$0<|h|<\delta$ para algún $\delta>0$ que yo puedo elegir.

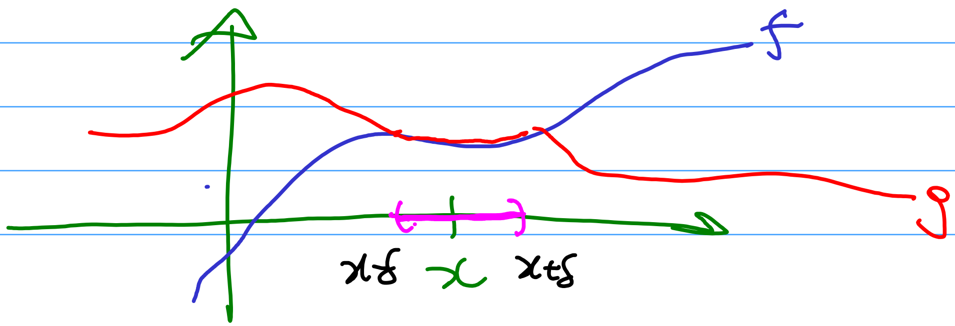
Entonces $x+h$ está muy cerca de x (a menos de δ)

Así que el límite (y por lo tanto $f'(x)$) depende solamente de

lo que vale f en los puntos muy cerca de x.

Más precisamente si f y g son funciones que valen lo mismo

cerca de x ($\exists\, \delta>0$ tq si $|x_1-x|<\delta \Rightarrow f(x_1)=g(x_1)$)



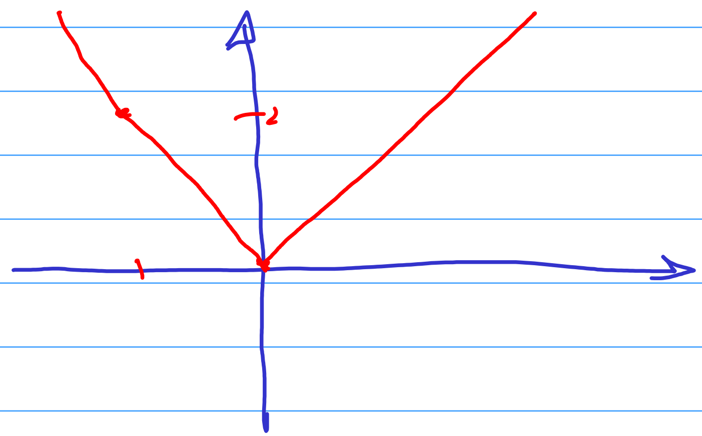
$f(x+h)=g(x+h)$ para h chico.

$\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$\rightarrow \quad f'(x) = g'(x)$

Obs $f'(x)$ no tiene porqué existir (ya que es un límite).

Ej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



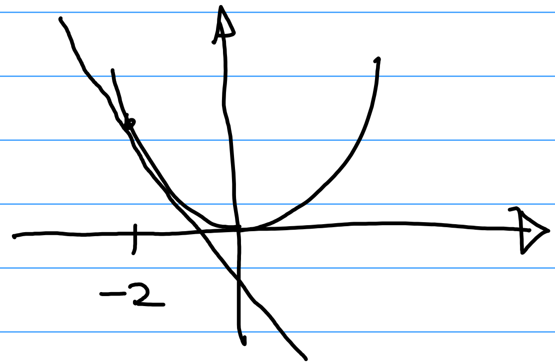
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

Así que $f'(0)$ no existe.

Pero $\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ Así que "f es derivable por la derecha"

$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$ "f " " " " izquierda"

Ejemplo Hallar la tangente a la curva $y = 2x^2$ en el punto de primera coordenada -2.



La tangente tiene una ecuación
$y = ax + b$, donde a es la pendiente.

$a = f'(-2)$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{2\overbrace{(-2+h)^2} - 2(-2)^2}{h} = 2\,\frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h} =$$

$$= 2\,\frac{\overbrace{h^2 - 4h + \cancel{4}} - \cancel{4}}{h} = 2(h - 4) \xrightarrow[h \to 0]{} -8.$$

$f'(-2) = -8$

La recta es $y = -8x + b$. Queremos que pase por $(-2, f(-2))$
$= (-2, 8)$

$8 = \overbrace{-8(-2)} + b = \underline{16} + b \Rightarrow b = 8 - 16 = -8$

$\boxed{y = -8x - 8}$

Derivada de una función lineal

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = ax+b$.

Para calcular $f'(x)$: $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$

$$= \frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Así que existe $f'(x) = a$. • "En el caso de una recta la derivada es la pendiente".

Ejercicio

$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $\quad f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{x+1-(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}} \frac{-\cancel{h}}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{-1}{\underbrace{(x+h+1)}_{\downarrow \; x+1}(x+1)} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{-1}{(x+1)^2}$$

Así que $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$