Recordar el valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

$|10| = 10.$

Propiedad: si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\boxed{|ab| = |a||b|}$

¿Porqué? Cuatro casos: 1) $a \geq 0$ y $b \geq 0$ $\to$ $ab \geq 0 \Rightarrow |ab| = ab$

$\to$ $|a| = a$, $|b| = b$ $\Rightarrow |a||b| = ab$

2) $a > 0$ y $b < 0$ $\to$ $ab < 0 \Rightarrow |ab| = -ab$

$\to$ $|a| = a$ y $|b| = -b$ $\Rightarrow |a||b| = a(-b) = -ab$

3) $a < 0$ y $b > 0$ igual que arriba

4) $a < 0$ y $b < 0$ $\to$ $ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab$

$\to$ $|a| = -a$ y $|b| = -b$ $\Rightarrow |a||b| = (-a)\cdot(-b) = ab$

5) si $a = 0$ o $b = 0$ $\Rightarrow$ $|ab| = |0| = 0 = |a||b|$

Proposición (desigualdad triangular).

Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $|a+b| \leq |a| + |b|$

Para ver esto usamos que $\underbrace{\sqrt{x^2} = |x|}$

quiere decir que $|x|^2 = x^2$

Porqué es verdad? : $|x|^2 = |x| \cdot |x| =$

$= |x x| = |x^2| = x^2$

$\sqrt{a}$ = el número que al cuadrado da a

Se prueba así: Alcanza con ver que $\sqrt{(a+b)^2} \leq |a| + |b|$

ó lo es lo mismo $(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$.

Entonces: $(a+b)^2 = \underset{|a|^2}{\overset{\shortparallel}{a^2}} + \underset{|b|^2}{\overset{\shortparallel}{b^2}} + 2\underset{|ab|}{\overset{\wedge\!\shortparallel}{ab}} \leq |a|^2 + |b|^2 + 2\underbrace{|ab|}_{2|a||b|}$ iguales

Funciones

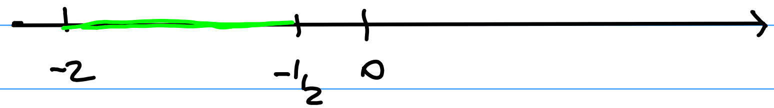
Ej $f(x) = x^2$

$f(x) = |x|$

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ ..

Ej $f(x) = \sqrt{x}$ no está definida si $x < 0$. f está definida para $x \geq 0$.

Intervalos de números reales

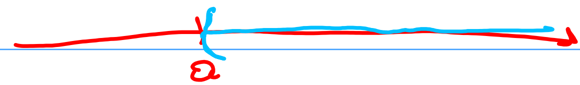


$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ a y b no están

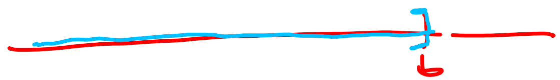
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ a y b sí están.

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ a está

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.



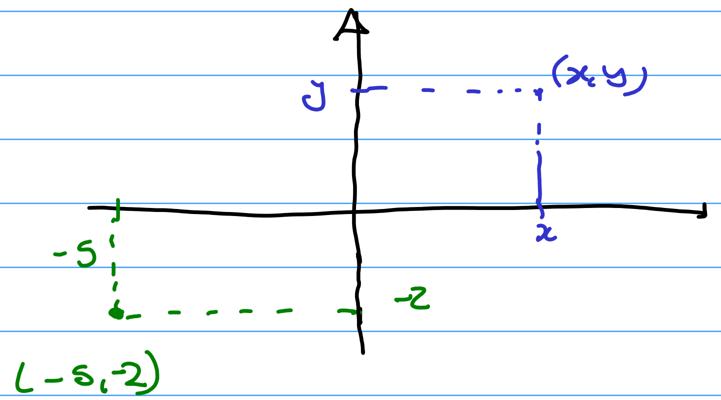
$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$



$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

Ej $f(x) = \sqrt{x}$ está definida en $[0, +\infty)$

Coordenadas Cada punto del plano se puede identificar con un par de números



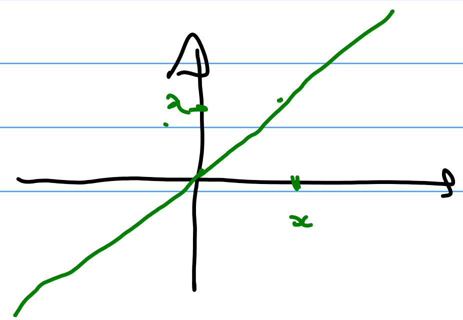
Gráficos

Si f es una función $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ su gráfico es

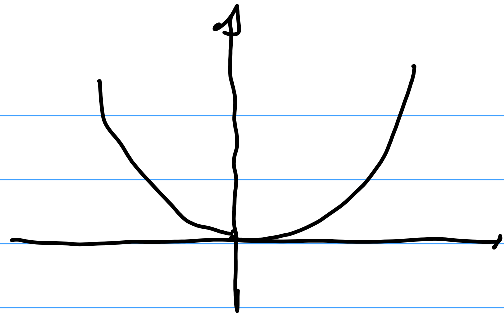
$\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ se puede pensar como subconjunto del plano.

Ej $f(x) = x$

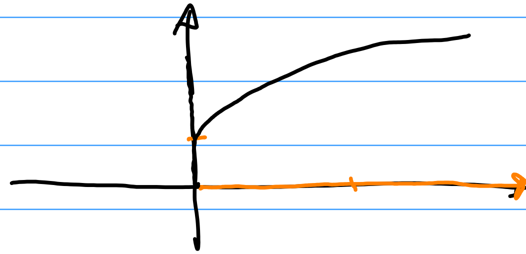
(x, x) con $x \in \mathbb{R}$



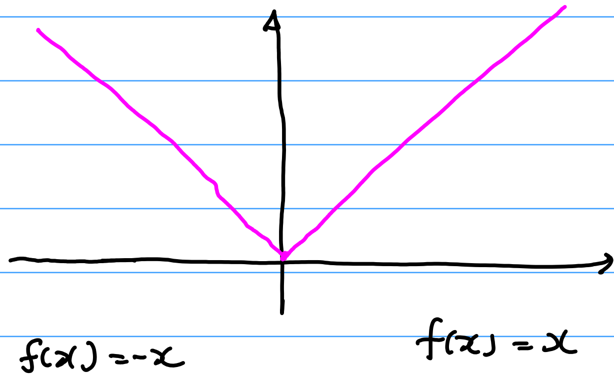
$f(x) = x^2$



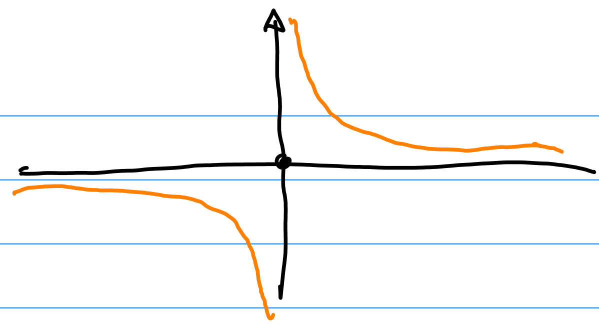
$f(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [0, +\infty)$



$f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

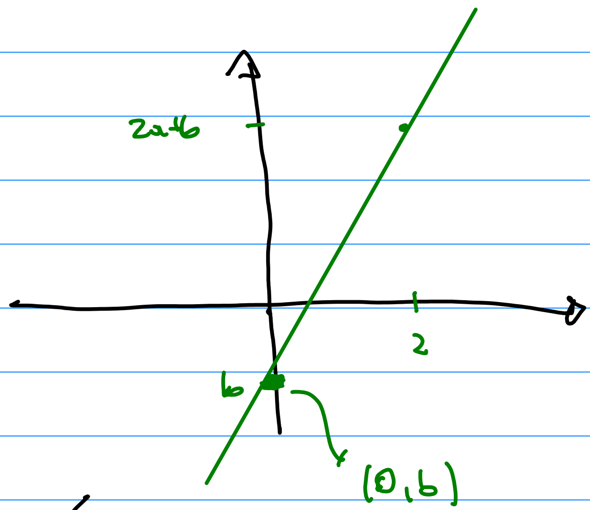


$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x \neq 0$



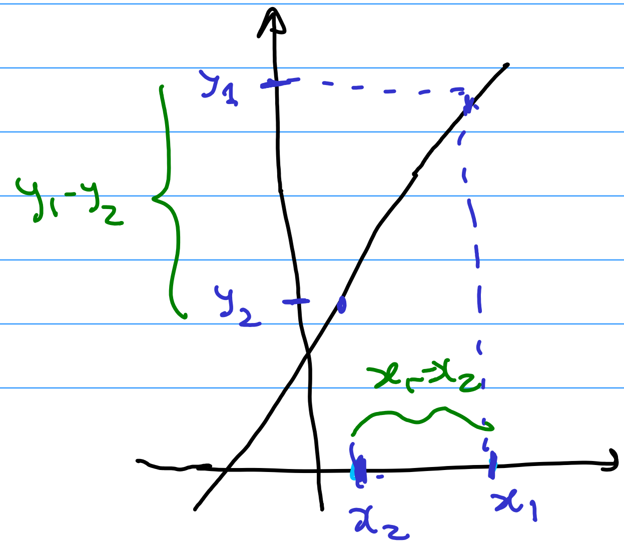
Rectas La ecuación de una recta va a ser $y = ax+b$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$ números fijos.

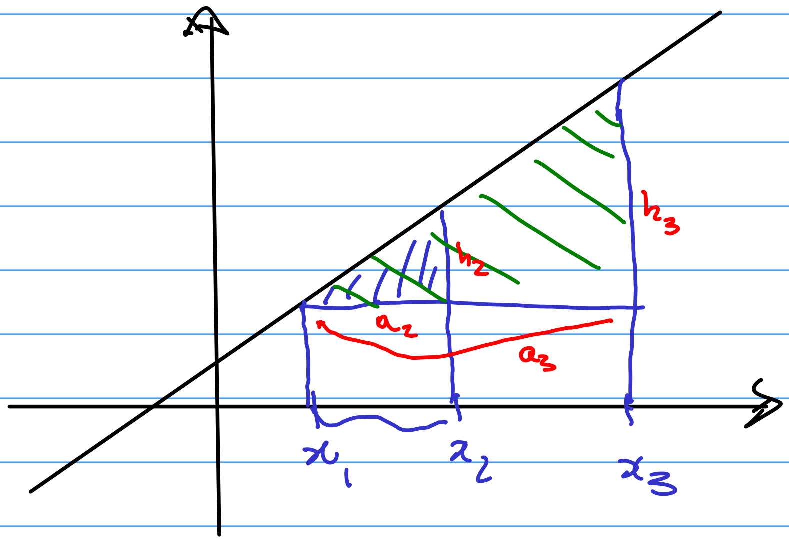
La recta es el gráfico de $f(x) = ax+b$.



Pendiente de la recta $y = ax+b$.

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ pendiente





$\dfrac{h_3}{a_3} = \dfrac{h_2}{a_2}$ pendiente.

Si la recta es $f(x) = ax+b$ entonces para todo x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \quad (\text{siempre da lo mismo}) \quad \text{pendiente}$$

¿Porqué?

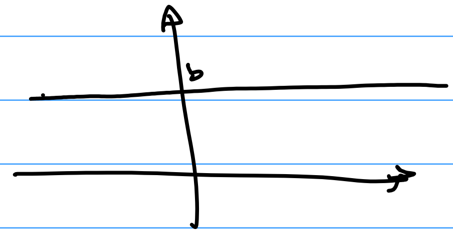
$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) + \cancel{b} \cancel{-b}$$

Paso dividiendo $(x_2 - x_1)$ y listo.

Ej: $f(x) = 2x + 1$ la pendiente es 2

$$\left[\frac{f(4) - f(-1)}{4-(-1)} = \frac{9-(-1)}{5} = \frac{10}{5} = 2 \right]$$

Ej: $a = 0$ osea $f(x) = b$

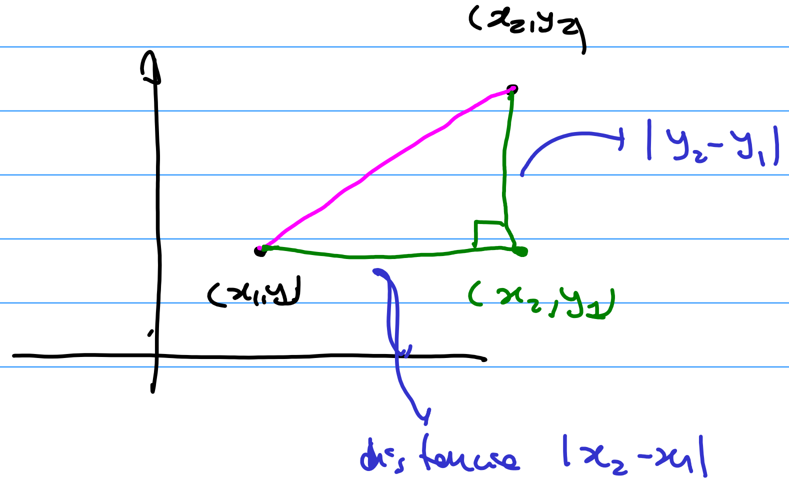


Distancia entre puntos

En $\mathbb{R}$, la distancia entre x_1 y x_2 es $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$

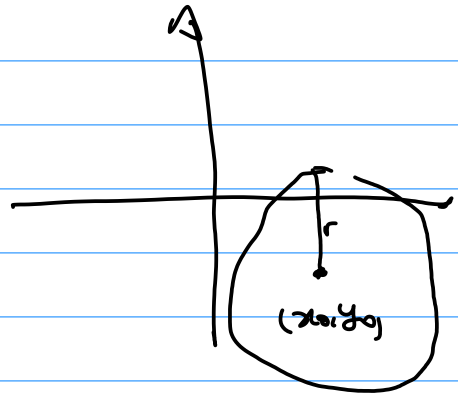
En el plano,
distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$



Algunas curvas

Circunferencias. Si (x_0,y_0) es un punto del plano, consideremos los (x,y) con $d((x,y),(x_0,y_0)) = r > 0$



$$r^2 = d((x,y),(x_0,y_0))^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

Así que la circunf. tiene ecuación

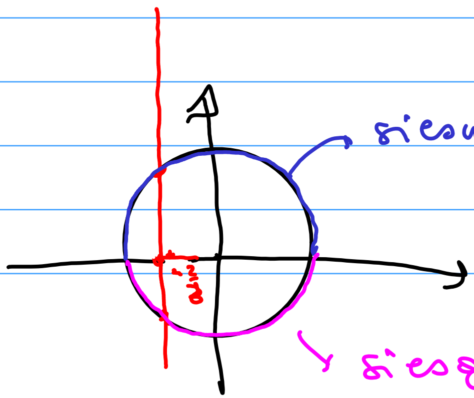
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$$

(x_0,y_0) centro

r radio

Ej centro $(0,0)$ y radio 1 : $x^2+y^2=1$

circunferencias no son gráficos.



si es un gráfico de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$(y = \pm\sqrt{1-x^2})$

si es gráfico $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad (x^2+f(x)^2 = 1)$

Muchas curvas se pueden escribir como $F(x,y) = r$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x^2+y^2$

No todas las curvas se pueden escribir así.