Repaso: números, fracciones.

Números naturales: $0, 1, 2, \ldots$ $\mathbb{N}$ conjunto de números naturales.

$2 \in \mathbb{N}$ "dos pertenece a $\mathbb{N}$"

$n \in \mathbb{N}$ "n " " "

Números enteros $0, 1, 2, \ldots$ $\mathbb{Z}$ conjunto de los números enteros.

$-1, -2, \ldots$

Números racionales (fracciones) $\frac{3}{4}$, 2, -8

Son fracciones $\frac{a}{b}$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$

Suma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Recordar que, por ejemplo, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

los números enteros son racionales: $a = \frac{a}{1}$ $\qquad$ $\underbrace{-7}_{\in \mathbb{Z}} = \frac{-7}{1} \in \mathbb{Q}$

Cada número racional tiene una representación decimal:

$\frac{1}{4} = 0{,}25$, etc.

- **Inversos** Cada $a/b \neq 0$ en $\mathbb{Q}$ tiene inverso que es b/a

O sea $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$

Si $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, su inverso se escribe x^{-1}

El $0 \in \mathbb{Q}$ es el único sin inverso.

- **Números reales** $\sqrt{2}$ No se pueden expresar como fracciones de números enteros (no son racionales)

π, e

subconjunto

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

↳ conjunto de números reales.

"Hay muchos más reales que racionales".

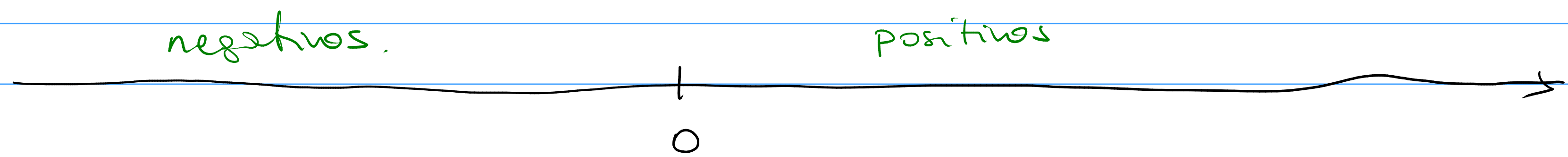
<u>Observación</u> si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe algún $q \in \mathbb{Q}$ $x < q < y$

<u>Orden</u> $\mathbb{R}$ tiene un orden: $x < y$, etc. $0 < 1$

Todo número es positivo o negativo o 0

$x < y \iff \underbrace{y - x}_{\text{positivo}} > 0$

$-4 < 5$ es $5 - (-4) = 9 > 0$.



$b < c$

$c > b$

Si $\underline{a > 0}$ y $\underline{b < c}$, entonces $ab < ac$

$$\left[\; ab < ac \iff \underbrace{ac - ab}_{a(c-b)} > 0 \;\right]$$

$$a \underbrace{(c-b)}_{>0}, \quad a > 0$$

Si $a < 0$ y $\underbrace{b < c}_{c-b>0}$ entonces $ac < ab$

$$\left[\; ac < ab \iff \underbrace{ab - ac}_{a(b-c)} > 0 \;\right]$$

$$a \underbrace{(b-c)}_{<0}, \quad a < 0$$

<u>Valor absoluto</u> si $x \in \mathbb{R}$, su valor absoluto, $|x|$ se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así que $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

$$|10| = 10$$

- <u>Potencias</u> x^n si $n \in \mathbb{N}$ es n copias de x multiplicadas.

$$\left(x^3 = x \cdot x \cdot x \right)$$

$x^0 = 1$ ← caso especial

Propiedades: $x^n y^n = (xy)^n$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 y^2 = xxyy \\ (xy)^2 = xyxy \end{array} \right]$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Si $x \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $x^n x^m = x^{n+m}$

$(x^2 x^3 = xxxxx = x^5)$

- $(x^n)^m = x^{nm}$

¿Cómo hacemos para calcular x^{-2}? De forma que las mismas fórmulas valgan.

$$x^{-2} = x^{(-1)2} = (\underbrace{x^{-1}}_{1/x})^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

Así que si $\underline{n \in \mathbb{N}}$, x^{-n} se define como $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$

Con esta definición, todas las fórmulas que vimos siguen valiendo para exponentes en $\mathbb{Z}$ (números enteros).

¿Cómo definimos $x^{1/2}$? Queremos que siga valiendo $(x^n)^m = x^{nm}$

Entonces tiene que valer $(x^{1/2})^2 = x^{\frac{1}{2}\cdot 2} = x^1 = x$

Así que $x^{1/2} = \sqrt{x}$, Ojo que $\sqrt{x}$ existe sólo si $x \geq 0$.

$x = (\sqrt{x})^2 \geq 0$

En general, $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ (no siempre existe si $x < 0$)

$$x^{\frac{m}{n}} = x^m \sqrt[n]{x}$$

$$\left[x^{\frac{m}{n}} = x^{m \cdot \frac{1}{n}} = \underbrace{x^m}_{} \cdot \underbrace{x^{\frac{1}{n}}}_{} \right]$$

__Funciones__ Una función es una regla o ley, o fórmula que a cada número le asigna otro número.

Notación: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$

$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Signo de x $\longrightarrow$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$sg(x)$

$x = sg(x) \cdot |x|$

$f(x) = x^2$

$f(-1) = 1 = f(1)$