Clase práctico Rocha – 10 de abril de 2023

Comenzamos con ideas sobre el ejercicio 25 del práctico 0 (página 12 de Lang). Queda para terminar.

25) $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $a < b$.

Mostrar que $a^2 < b^2$.

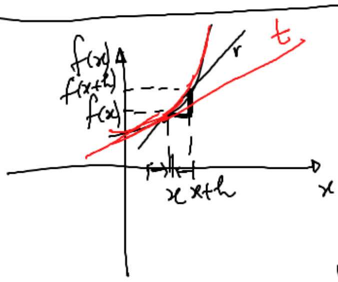
$0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \quad (b^2 - a^2 > 0)$

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$ Sabemos

$b^2 - a^2 = (b+a).(b-a)$ Terminar

A continuación revisamos el concepto de derivada y tangente al gráfico de una función.

Derivada de una función en un punto



$f: D \to \mathbb{R}$

$D \subset \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

cociente incremental

s) $y = \underbrace{a}_{\text{pendiente}}x + b$

derivada de f en x.

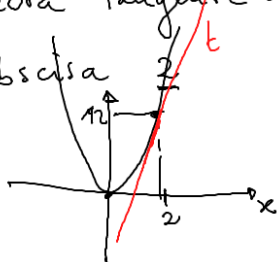
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ si exista.

$f'(x)$ representa la pendiente de la tangente al gráfico de f en $(x, f(x))$.

$y = 3x^2$ o $f(x) = 3x^2$

Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico en el punto de abscisa 2

$f(2) = 3 . 2^2 = 12$



Ejemplo de determinación de la recta tangente al gráfico de una función en un punto.

$$\frac{4}{6} = \frac{2\times\cancel{2}}{3\times\cancel{2}}$$

$$f(x) = 3x^2$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = 3\cdot(x+h)^2$$

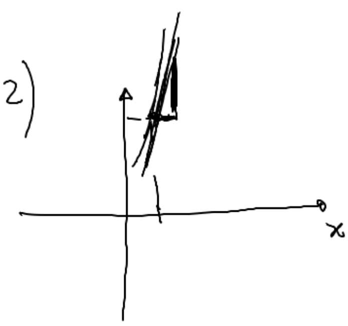
$$\lim_{h\to 0} \frac{3\cdot(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\cdot(x^2+2xh+h^2) - 3x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6xh + 3h^2 - \cancel{3x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6xh+3h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(6x+3h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 6x + \underbrace{3h}_{\to 0} = 6x$$

$$f(x) = 3x^2$$

$$(2, 12)$$



$$f'(x) = 6x$$

$$\Downarrow$$

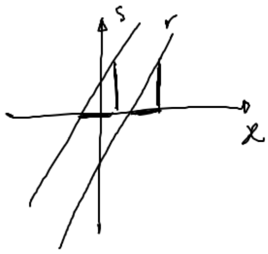
$$f'(2) = 12 \longrightarrow \text{pendiente}$$
$$a = 12$$

$$t)\ y = ax + b$$

$$y = 12x + b \longrightarrow 12 = 12\cdot 2 + b \longrightarrow 12 - 24 = b$$
$$b = -12$$

$$t)\ y = 12x - 12$$

Revisión de la condición de paralelismo de rectas dadas por sus ecuaciones.



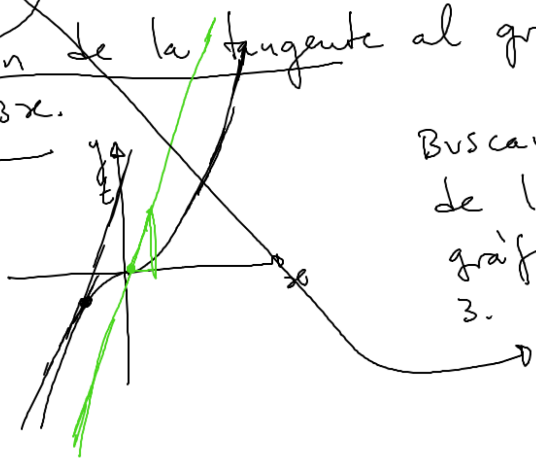
$r \parallel s$ (no verticales) entonces r y s tienen la misma pendiente.

$r \perp s$ (no verticales), entonces el producto de las pendientes de r y s es igual a -1.

Ejercicio 1 del práctico 1. Lo hacen los estudiantes.

$y = x^3$

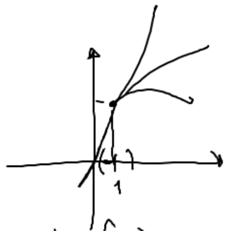
[Ecuación de la tangente al gráfico paralela a $y = 3x$.]

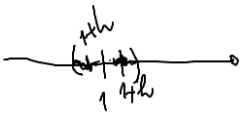


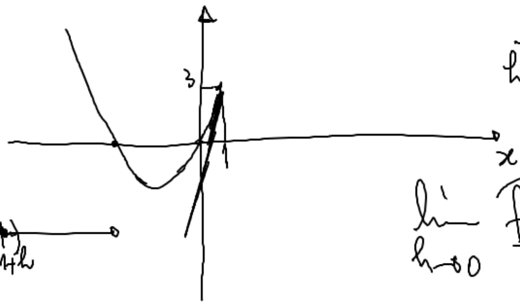
Buscamos la ecuación de la tangente al gráfico con pendiente 3.

3)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ -x^3 + 4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$







$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$x = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \begin{cases} h \to 0^+ \\ h \to 0^- \end{cases}$$

5)

$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^{12} \longrightarrow f'(x) = 12 \cdot x^{11}$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$(k \cdot f)' = k \cdot f' \quad (k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

a) $f(x) = \underbrace{7.x^3} + \underbrace{4x^2}$ (del práctico)

$f'(x) = 7.3.x^2 + 4.2x$

$f'(x) = 21x^2 + 8x$

Ejemplo:

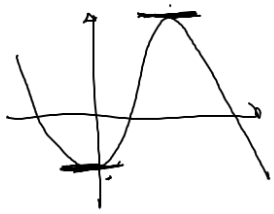
$(f.g)' = f'.g + f.g'$

$f(x) = \underbrace{(4x^3 + x)} . \underbrace{(2x - 1)}$

$f'(x) = \underbrace{(12x^2 + 1)} . (2x - 1) + (4x^3 + x) . 2$

$$y = \frac{3x^2 + x \quad f}{2x^2 + 3 \quad g} \qquad y' = \frac{(6x+1)\cdot(2x^2+3) - (3x^2+x)\cdot(4x)}{(2x^2+3)^2} =$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} \qquad = \frac{\qquad\qquad}{(2x^2+3)^2}$$



$$\cancel{(2x^2+3)(2x^2+3)}$$