Clase práctico Rocha 12 de junio

Práctico 4

1) a) $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1} =$

$$\frac{2x^3-2x+5}{x^4-1} = \frac{\cancel{x^4}\cdot\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\cdot\left(1-\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2}{x^3}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{5}{x^4}}_{\to 0}}{1 - \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\to 0}} = 0$$

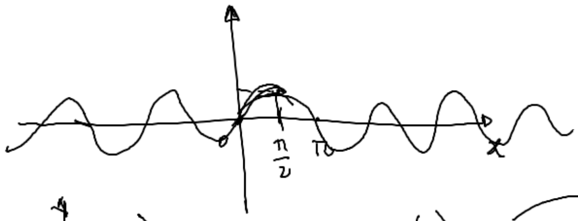
Si $f(x) \to \infty$ $(x \to A,\ x \to \infty)$ entonces $\frac{k \neq 0}{f(x)} \to 0$

$$\frac{2x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1} = \frac{2\cancel{x^3}\left(1 - \frac{2x}{2x^3} + \frac{5}{2x^3}\right)}{\cancel{x^4}\cdot\underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}_{\to 1}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \frac{2}{x} \to 0^{\pm}$$

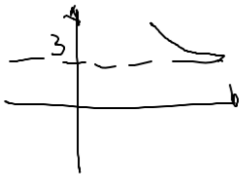
b) $$\frac{x^2+1}{\pi x^2 - 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\pi\cancel{x^2}\left(1 - \frac{1}{\pi x^2}\right)} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \frac{1}{\pi}$$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

$\nexists \lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen}(x)$



$|\operatorname{sen} x| \leq 1$



$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\text{acotada entre } -1 \text{ y } 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0$$

e) $x^3 - x + 1 = x^3 \cdot \left(1 - \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{x^3}}\right) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} x^3 \longrightarrow \pm\infty$

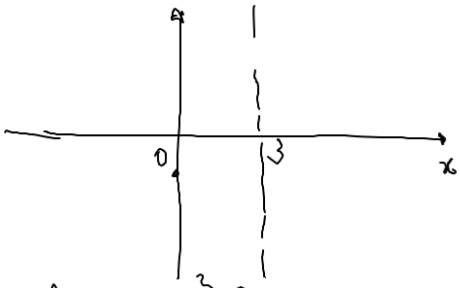
2) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

Dominio : $\mathbb{R} - \{3\}$ $\qquad f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$

Intersecciones con los ejes:

Con Ox : $x^2+2=0$ No tiene raíces

Con Oy : $f(0) = -\frac{2}{3}$ $\qquad \left(0, -\frac{2}{3}\right)$



$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-3) - (x^2+2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-2}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-6x-2}{(x-3)^2}$$

$$x^2-6x-2=0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36+8}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{44}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4\times 11}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = \frac{\cancel{2}(3 \pm \sqrt{11})}{\cancel{2}} =$$

$$= \begin{cases} 3+\sqrt{11} \cong 6{,}3 \\ 3-\sqrt{11} \cong -0{,}3 \end{cases}$$

Sg x^2-6x-2	$+$	0	$-$	0	$+$
x		$3-\sqrt{11}$		$3+\sqrt{11}$	

Sg $(x-3)^2$	$+$	0	$+$
x		3	

$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
	$3-\sqrt{11}$		3		$3+\sqrt{11}$	

$f(3-\sqrt{11})$ máx. local

$f(3+\sqrt{11})$ mín. local

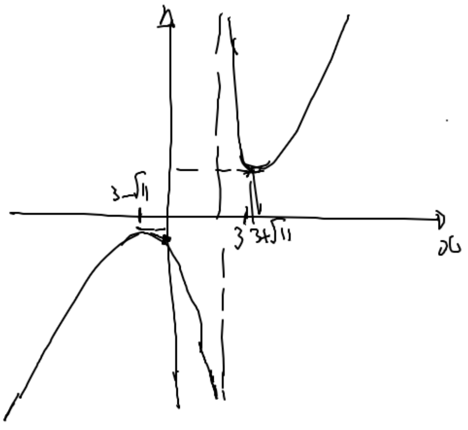
Terminarlo.

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}$$

$$\lim_{x\to 3^\pm} \frac{\overbrace{x^2+2}^{\to 11}}{\underbrace{x-3}_{\to 0^\pm}} = \pm\infty$$

$\operatorname{sg}(x-3) =$ $-$ 3 $+$ x



F es primitiva de f $\iff$ $F' = f$

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ $\qquad$ $F(x) = -\cos(x)$

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ ó $-\frac{\cos(2x)}{2}$

$$\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\operatorname{sen}(2x)\cdot 2\right)$$

$= \operatorname{sen}(2x)$

$f(x) = \text{sen}(2x)$

Una primitiva de f es $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

$G(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + 3$

$G'(x) = \text{sen}(2x) + 0$

$G(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + K$

$K \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$(\log(x))' = \frac{1}{x}$

$F(x) = \log(x+1)$

d) $f(x) = 2x - 5$

$F(x) = x^2 - 5x + K$, $K \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 + 3x$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

Algunas ideas sobre ejercicios del práctico 3

6. Hallar las coordenadas de los puntos de la curva $y^2 = x+1$ que están más próximos al origen.

Hay que considerar cuál es la función que, para cada *x*, nos da como imagen la distancia del punto de la curva dada y abscisa *x* al origen (0, 0).

Los puntos de la curva dada, de abscisa *x*, tienen ordenada $\sqrt{x+1}$ o $-\sqrt{x+1}$.

A partir de esto, planteamos la función distancia entre el punto $(x, \sqrt{x+1})$ y (0, 0). A esa función tenemos que hallarle el mínimo (tener en cuenta el dominio).

7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Demostar que f es constante.

Sugerencia: Usar la definición de derivada como límite.

8. Estamos regando el prado y dirigiendo la manguera hacia arriba con un ángulo de inclinación igual a θ. Sea r el rango de la manguera, es decir, la distancia desde la manguera hasta el punto de impacto del agua. Entonces r está dado por la fórmula $r = \dfrac{2v^2}{g} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, donde v y g son constantes.¿Cuál es el ángulo que hace máximo al rango?

Sugerencia: Usar alguna fórmula que involucre $sen\theta \; cos\theta$, que permita estudiar el máximo de una sola función trigonométrica.