Clase práctico Rocha 27 de marzo

Valor absoluto de un número real

$$|a| = \begin{cases} a\ , & \text{si } a \geq 0 \\ \underbrace{-a}_{\text{opuesto de a}}\ , & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ej: $|15| = 15$

$|-12| = -(-12) = 12$

$|0| = 0$

Propiedades del v.a.

1) $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (para todo a real)

2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

3) $|a+b| \leq |a| + |b|$ $\quad$ ($|-3+5| = |2| = 2$

$|-3| + |5| = 3+5 = 8$)

4) $\overbrace{|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k}$

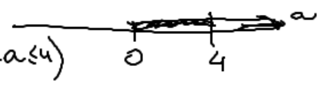
$(k > 0)$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que:

$|a| \leq 4$

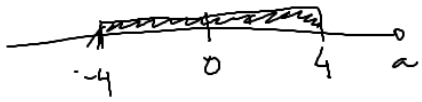
1) Si $\underline{a \geq 0}$, $\quad |a| = a \quad \Rightarrow (|a| \leq 4 \Leftrightarrow a \leq 4)$

2) Si $a < 0$, $\quad |a| = -a \Rightarrow (|a| \leq 4 \Leftrightarrow -a \leq 4)$



2) $a<0$

$|a|\leq 4 \Leftrightarrow -a \leq 4 \Leftrightarrow (-1)(-a) \geq (-1)(4) \Leftrightarrow \underline{a \geq -4}$



$3<4$

$\Rightarrow 3\times 2 < 4\times 2$

$6<8$

$3\times(-2) > 4(-2)$

$-6 > -8$

Desigualdad en $\mathbb{R}$:

1) $a<b \Rightarrow a+c<b+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

2) $a<b$ y $c>0 \Rightarrow a.c<b.c$

$a<b$ y $c<0 \Rightarrow a.c > b.c$

Página 12

3) $\underline{|x^2-2| \leq 1}$ (Resolver una inecuación: hallar todos los reales que verifican esa desigualdad).

$|a| \leq 4$

1) $a \geq 0$ ———

2) $a<0$ ———

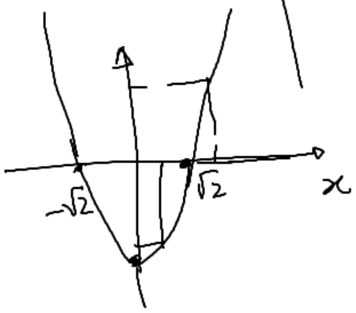
1) $\underline{x^2-2 \geq 0}$ ———

2) $\underline{x^2-2<0}$ ———

Estudio del signo de $f(x)=x^2-2$

$\cancel{2}+x^2-\cancel{2}=0+2$

$\sqrt{x^2}=\sqrt{2}$



1 $x^2-2=0$

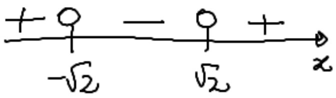
$x^2-2+2=0+2$

$x^2=2$

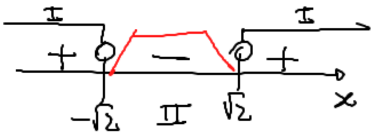
$|x|=\sqrt{2}$

$x=\pm\sqrt{2}$

$x^2=0+2$



Sg (x^2-2)



$|x^2-2|\leq 1$

1) $x\leq-\sqrt{2}$ o $x\geq\sqrt{2}$ $\Rightarrow x^2-2\geq 0 \Rightarrow |x^2-2|=x^2-2$

$|x^2-2|\leq 1 \iff x^2-2\leq 1 \iff$

$\iff x^2-2-1\leq 0 \iff x^2-3\leq 0$

$x^2-3=0 \iff x^2=3 \iff x=\pm\sqrt{3}$

Sg (x^2-3)

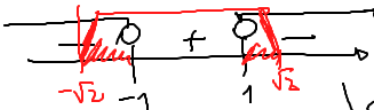
$\longrightarrow S_I=[-\sqrt{3};-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};\sqrt{3}]$

2) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2 < 0 \Rightarrow |x^2-2| = -(x^2-2) = -x^2+2$

$|x^2-2| \leq 1 \iff -x^2+2 \leq 1 \iff -x^2+2-1 \leq 0$

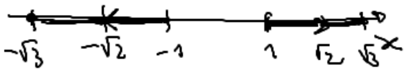
$\iff \underbrace{-x^2+1 \leq 0}$ $\qquad (-x^2+1 = 0 \iff -x^2 = -1 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

$Sg(-x^2+1)$



$S_{II} = (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$

S



$S = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

Otra forma:

$|a| \leq k \iff -k \leq a \leq k$

$|x^2-2| \leq 1 \iff -1 \leq x^2-2 \leq 1$

$$\begin{cases} -1 \leq x^2 - 2 & (1) \\ x^2 - 2 \leq 1 & (2) \end{cases}$$

(1) $-1 \leq x^2 - 2$

$0 \leq x^2 - 2 + 1$

$0 \leq x^2 - 1$

Raíces de (x^2-1)

Signo de (x^2-1) $\longrightarrow$

(2) $x^2 - 2 \leq 1$

Raíces

Estudio de signo

(intersección de los 2 conjs. solución)

10) (página 12)

$(x-5)^2 \cdot (x+10) \leq 0$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{negativo o cero}}$

$f(x) = (x+5)^2 \cdot (x+10) = (x+5)(x+5)(x+10)$

Raíces: $(x+5)(x+5)(x+10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \Leftrightarrow x=-5 \\ \text{ó} \\ x+5=0 \\ \text{ó} \\ x+10=0 \Leftrightarrow x=-10 \end{cases}$

$\mathrm{Sg}\, \overbrace{(x+5)^2}^{\geq 0}(x+10)$ $\quad - \; 0 \; + \; 0 \; + \quad x$ $\quad(-10,\ -5)$ $\qquad S = (-\infty, -10] \cup \{5\}$

Otras explicaciones

Para resolver cualquier ecuación donde aparece un polinomio comparado con cero, por ejemplo:

$2x - 3 < 0$; $x^2 - 4 \geq 0$, etc., buscamos las raíces del polinomio y luego le estudiamos el signo a la función. Si no está comparado con cero, se transforma en una de ese tipo y luego se estudia el signo.

Supongamos ahora que queremos resolver la inecuación $|3x^2 - 4| < 8$.

Forma 1: Podemos utilizar la propiedad que establece: $|a| < k, k > 0 \Leftrightarrow -k < a < k$.

Por tanto: $|3x^2 - 4| < 8 \Leftrightarrow -8 < 3x^2 - 4 < 8 \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < 3x^2 - 4 \\ \quad y \\ 3x^2 - 4 < 4 \end{cases}$

En este caso resolvemos las dos últimas inecuaciones y el conjunto solución que buscamos será la intersección de los dos conjuntos solución obtenidos.

$$(1)\ -8 < 3x^2 - 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 + 8 > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4 > 0$$

La última es una inecuación que nos pide determinar todos los *x* reales tales que

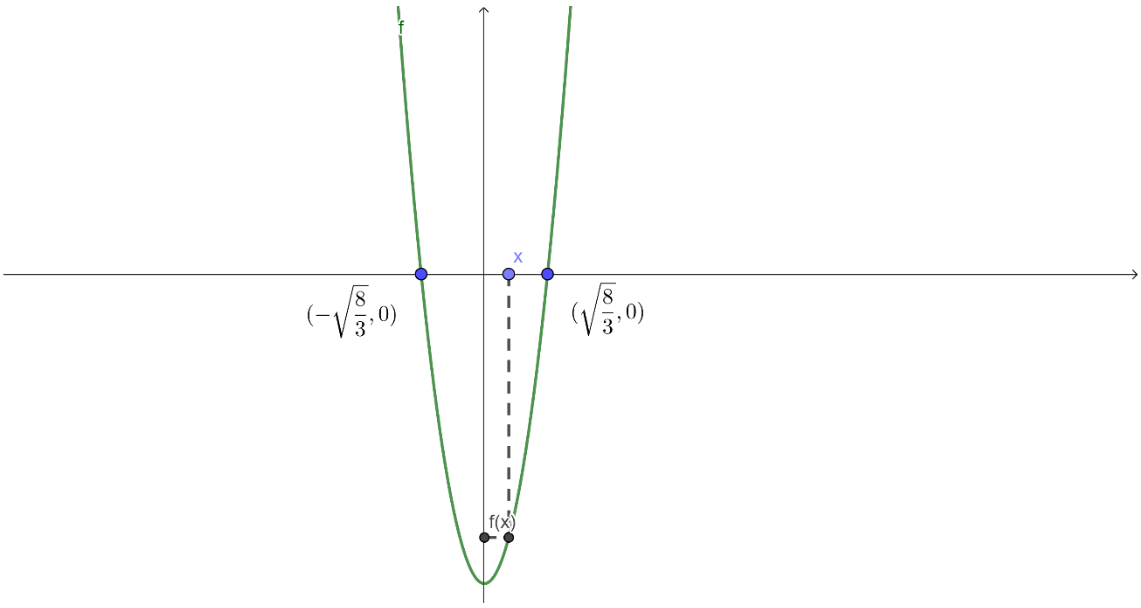
$3x^2 + 4$ resulte positivo. En este caso particular, podemos ver que, cualquiera sea *x* real, $3x^2 + 4 > 0$. (¿Por qué?). Entonces, esta inecuación tiene como conjunto solución al conjunto *R* de todos los reales. Lo indicamos así: $S_I = R$.

Lo podemos representar como toda la recta real.

(2) $3x^2 - 4 < 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 8 < 0$

Para determinar el conjunto solución de la última inecuación, consideramos la función

$f(x) = 3x^2 - 8$, como queremos determinar los x para los que $f(x) < 0$, buscamos las raíces de la función y estudiamos el signo. Gráficamente lo veríamos así:

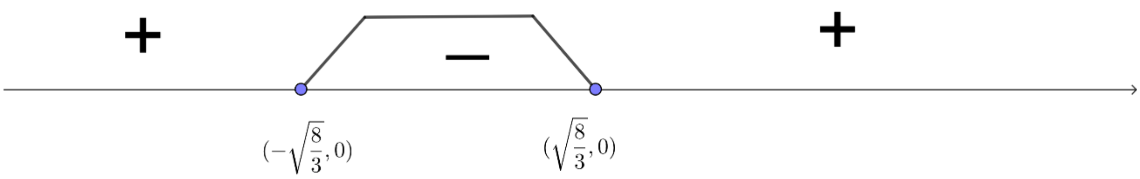


Podemos ver que $f(x) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{8}{3}} < x < \sqrt{\frac{8}{3}}$

La forma analítica de resolver la inecuación $3x^2 - 8 < 0$, determinamos las raíces:

$$3x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{8}{3}} \ o \ x = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Estudiamos el signo de la función $f(x) = 3x^2 - 8$:



Para determinar el conjunto solución de la inecuación $|3x^2 - 4| < 8$, como ya dijimos, tenemos que determinar la intersección de los dos conjuntos solución.

Como el primero es R y el segundo es el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$, la intersección de los dos conjuntos es este último. Por tanto: $S = \left(-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$