



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

# Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Grafos

Víctor Viana

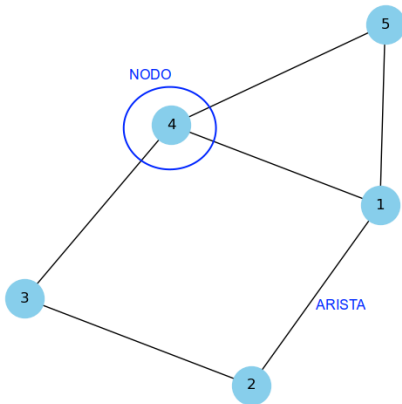
[victor.viana@cut.edu.uy](mailto:victor.viana@cut.edu.uy)

30/5/2023

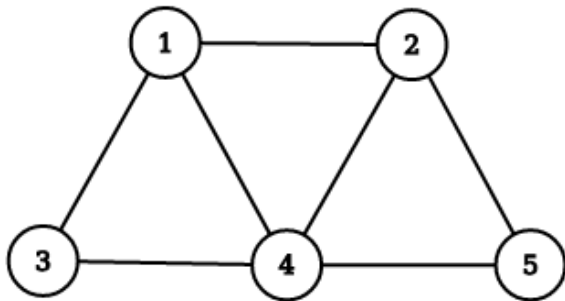
# ¿Qué es un grafo?



- ▶ Un grafo está formado por un conjunto de vértices y un conjunto de aristas que unen pares de vértices
- ▶ Es un objeto matemático abstracto pero se usa para modelar problemas reales.

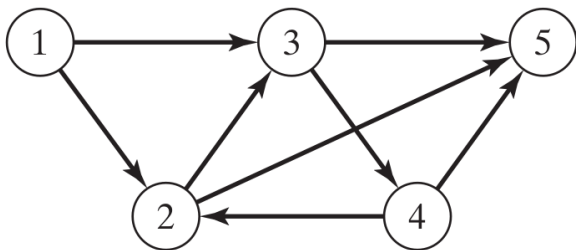


- ▶ Formalmente, un grafo  $G = (V, E)$  es una pareja ordenada en la que  $V$  es un conjunto no vacío de vértices y  $E$  es un conjunto de aristas.
- ▶ Donde  $E$  consta de pares no ordenados de vértices, tales como  $\{x, y\} \in E$ , entonces se dice que  $x$  e  $y$  son adyacentes; y en el grafo se representa mediante una línea no orientada que una dichos vértices.



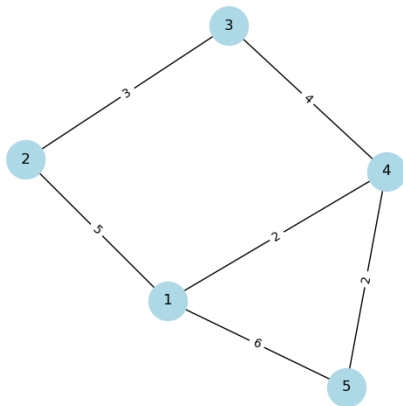
Matriz de adyacencia

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |



Matriz de adyacencia

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

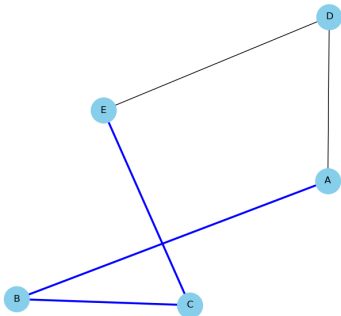


Matriz de adyacencia

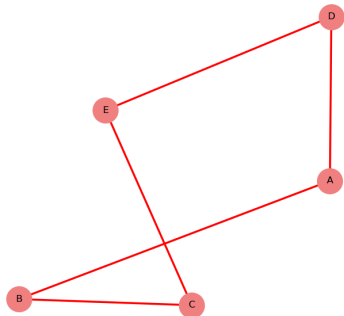
|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 0 | 2 | 6 |
| 5 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| 0 | 3 | 0 | 4 | 1 |
| 2 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| 6 | 0 | 0 | 2 | 0 |

- ▶ Un **camino** es una secuencia de vértices donde cada par consecutivo está conectado por una arista.
- ▶ Si el camino comienza y termina en el mismo vértice, se llama **ciclo**.

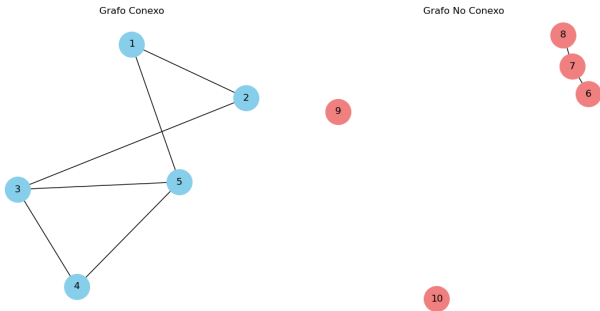
Camino:  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E$



Ciclo:  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$

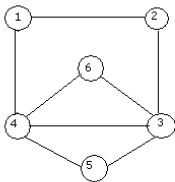


- Si existe un camino entre cada par de vértices, el grafo se denomina conexo.





- ▶ **Problema genérico:** dado un grafo (con múltiples líneas o aristas) encontrar un camino que recorra el grafo pasando por cada arista exactamente una vez.
- ▶ **Solución:** El grafo debe ser conexo (no se particiona), y en cada punto (vértice) deben incidir un número par de líneas (aristas). Esta condición es suficiente para definir lo que se llama un ciclo euleriano.



**Figura:** Ciclo euleriano: 1, 2, 3, 4, 6, 3, 5, 4, 1

- ▶ Una aplicación frecuente de la teoría de grafos es la del método de camino **hamiltoniano** óptimo para decidir el camino a seguir por un viajante, de tal modo de economizar su recorrido.
- ▶ El objetivo es hallar un camino que pase por todos los lugares una y solo una vez y que nos de el costo menor en distancia.
- ▶ Dicho de otro modo, se deben buscar las permutaciones de los lugares de forma tal que la distancia recorrida total sea mínima.





- ▶ El problema del vendedor viajero (TSP) responde a la siguiente pregunta: dada una lista de lugares y las distancias entre cada par de ellos, ¿cuál es la ruta más corta posible que visita cada lugar exactamente una vez y al finalizar regresa al lugar de origen?
- ▶ Este es un problema difícil dentro en la optimización combinatoria, muy importante en investigación operativa y en ciencias de la computación.

## Otra clase de grafos: Árboles



Los **árboles**, son grafos en el que cualesquiera dos vértices están conectados por exactamente un camino

