UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Métodos de resolución en Programación Entera

Víctor Viana

victor.viana@cut.edu.uy

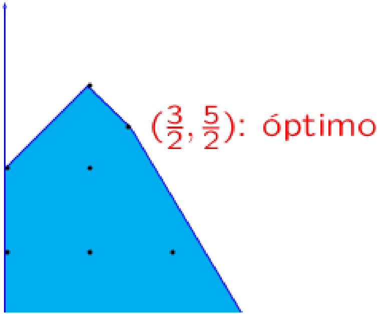
23/5/2024

Contenido

- Un caso particular es cuando las variables enteras toman valores binarios 0, 1. Están asociadas a las decisiones del tipo “si o no” realizar una actividad o acción.
- Los problemas de Programación Lineal Entera (ILP) o Entera Mixta (MILP) son más difíciles de resolver que los problemas de Programación Lineal (LP).

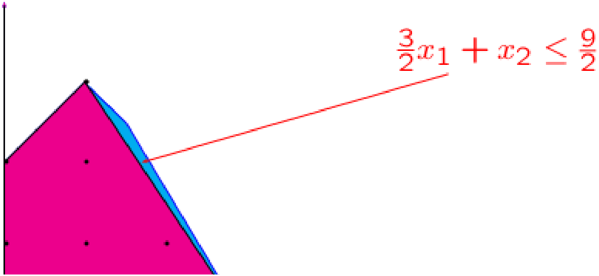
- Se introducen nuevas restricciones al problema, hasta lograr que la solución óptima del nuevo problema sea entera.
- Se eliminan algunas soluciones continuas sin eliminar ninguna solución entera.
- Estos métodos se basan en ir incorporando secuencialmente desigualdades (restricciones) válidas hasta que la solución óptima encontrada verifique las condiciones de integralidad.

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras.} \end{aligned}$$



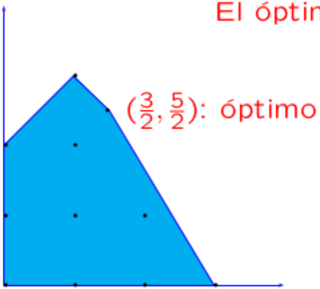
Ejemplo(II)

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & -5x_1 - 4x_2 \\
\text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras.}
\end{aligned}
$$



Ejemplo(III)

$$
\begin{array}{lrl}
\text{mín} & -5x_1 - 4x_2 & \\
\text{s.a.} & -x_1 + x_2 & \leq 2 \\
 & x_1 + x_2 & \leq 4 \\
 & 5x_1 + 3x_2 & \leq 15 \\
 & x_1, x_2 & \geq 0 \text{ y enteras.}
\end{array}
$$

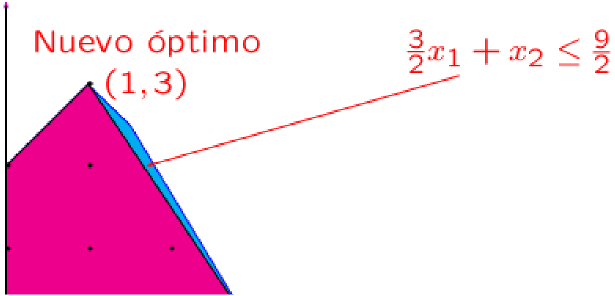


El óptimo continuo no verifica:

$$\frac{3}{2}x_1 + x_2 \leq \frac{9}{2}$$

Ejemplo(IV)

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & -5x_1 - 4x_2 \\
\text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_1 + x_2 \le 4 \\
& 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ y enteras.}
\end{aligned}$$



Planos de corte (cont.)

- Las nuevas desigualdades deben ser válidas para el problema entero pero no para el problema continuo.
- Algoritmos de planos de corte: generación “automática” de desigualdades válidas que corten la solución fraccional encontrada.
- Convergen muy lentamente. Sólo son eficientes si se combinan con otros métodos.‘

Branch and Bound

- Branch and Bound (Ramificación y Poda) es un método para resolver problemas de programación lineal en cual al menos una de las variables debe tomar valores enteros.
- Existen casos en los que se puede relajar (quitar) la exigencia de que las variables sean enteras; resolver el ILP o MILP como un problema LP y estar seguros que la solución óptima que se obtiene es entera.

Branch and Bound (cont.)

- El método de Branch and Bound es un procedimiento iterativo de búsqueda de soluciones, que se basa en la relajación, ramificación y criterios para acotar la búsqueda.
- En cada paso iterativo, se deben resolver una cierta cantidad de problemas de programación lineal (LPs) que se obtienen a partir de relajar las restricciones de integridad (del dominio de las variables).
- Para acotar las ramificación se usan distintos criterios de finalización o vaciamiento.

Branch and Bound(cont.)

- La relajación se utiliza para hacer más fácil de resolver un problema de optimización. Esta nueva versión se denomina problema relajado.
- Si la solución óptima determinada para el problema relajado cumple con las exigencias del problema original, entonces también es solución óptima del problema original.

Idea

- Dado el MILP original P_0 , obtener un problema de programación lineal PL relajando las exigencias de integralidad de P_0 .
- Si la solución óptima de PL es entera, entonces es solución del problema original P_0
- Si la solución óptima de PL no es entera, ramificar en una de las variables que no sea entera para obtener problemas enteros P_1 y $P_{'}2$.
- Continuar hasta que todos los subproblemas están resueltos, según alguno de los criterios de vaciamiento.

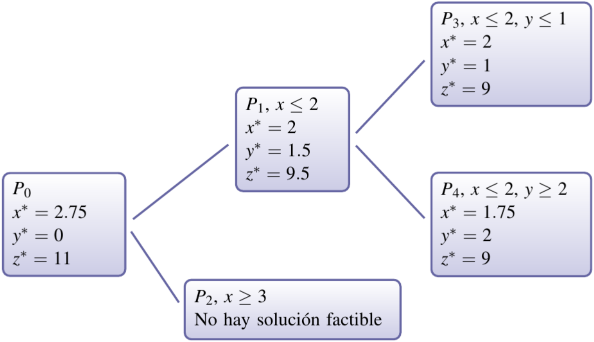
Criterios de vaciamiento

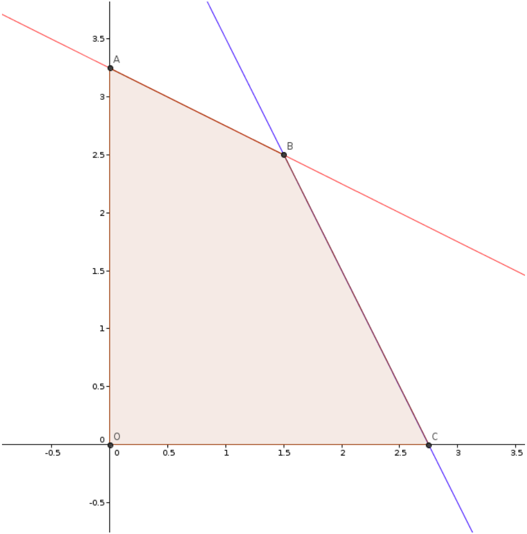
- La solución óptima del subproblema relajado es entera.
- El subproblema relajado no tiene solución (no hay solución factible).
- El valor objetivo de la solución óptima del subproblema relajado es peor o igual al valor de la mejor solución entera encontrada hasta el momento.

Ejemplo

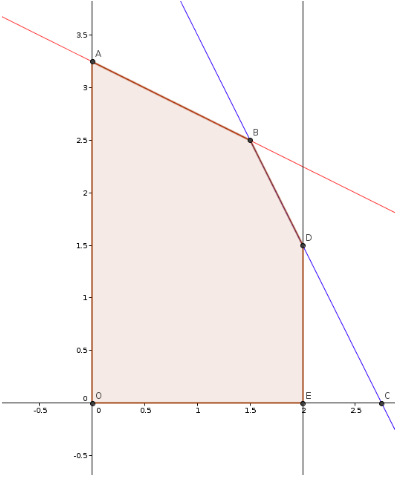
$$\begin{cases} \max 4x + y & & \\ 4x + 2y & \leq & 11 \\ 2x + 4y & \leq & 13 \\ x, y & \geq & 0 \ \text{enteras} \end{cases}$$

Ejemplo - resolución

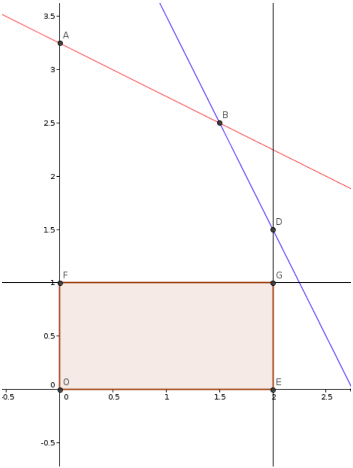



A
B
C
O
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

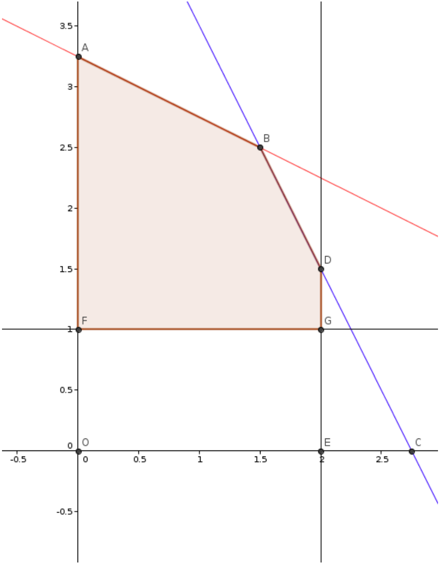
$x \leqslant 2$



$x \leqslant 2, y \leqslant 1$



$x \leqslant 2, y \geqslant 2$



Problema

- Un transportista ha suscripto un contrato para transportar chips de madera desde la playa de una industria hasta el puerto, donde serán embarcados hacia el extranjero.
- Para el cumplimiento del contrato estudia la posibilidad de asignar dos camiones con capacidades de carga y costos operativo diferentes.
- La industria le ha adjudicado una cuota mínima de chips a transportar de 3000 t, los que serán remunerados a razón de $8/t de chips transportada desde su playa al puerto, el que se encuentra a una distancia de 6,25 km.
- Los excedentes que el contratista pueda entregar serán recibidos y retribuidos al mismo precio que la industria ofrece para la cuota asignada.

Problema (cont.)

- Por otra parte, el contrato no establece una cuota máxima de chips a transportar para mejorar las posibilidades de que sus contratistas obtengan algún retorno económico.
- El contrato establece que el transportista dispondrá de 60 días para entregar la cuota asignada con el único requisito de informar su plan de tareas antes de iniciarlas, pues la industria tiene otros contratos de transporte para la carga del barco suscriptos con anterioridad y además piensa usar camiones propios en caso de ser necesario.
- El transportista acostumbra enviar sus camiones al taller para la realización de un service general cada 5000 km recorridos, para lo cual lleva un registro de la distancia que cada una de sus unidades ha recorrido.
- Esta información es crítica porque se estima que las unidades enviadas al service permanecerán inactivas un tiempo tal que dificultarían seriamente la posibilidad de cumplir el contrato una vez reincorporadas al trabajo.

Problema(cont.)

- Habiendo considerado los tiempos de carga y descarga, junto con los turnos de sus choferes, ha estimado la cantidad de viajes diarios que cada uno de los camiones que asignará al cumplimiento del ontrato pueden realizar y ha acordado que los camiones pueden pasar las horas fuera de servicio en la playa de estacionamiento de la industria.

Camión	Capacidad de carga (t)	Costo operativo ($\$.km^{-1}$)	Viajes diarios ($cargas.día^{-1}$)	Distancia recorrida* (km)
1	8	4.98	8	2806.25
2	12	7.40	5	1865.00

* Puestos en la playa de la industria

- El contratista necesita determinar el número de cargas que le asignará a cada camión para maximizar el ingreso neto (sin considerar costos fijos) del contrato, evitando que las unidades cumplan los 5000 km previstos para su mantenimiento durante los 60 días asignados.

$max\ z = 1,75x_1 + 3,50x_2$

sujeto a

$x_1 \leq 175,50$

$x_2 \leq 250,80$

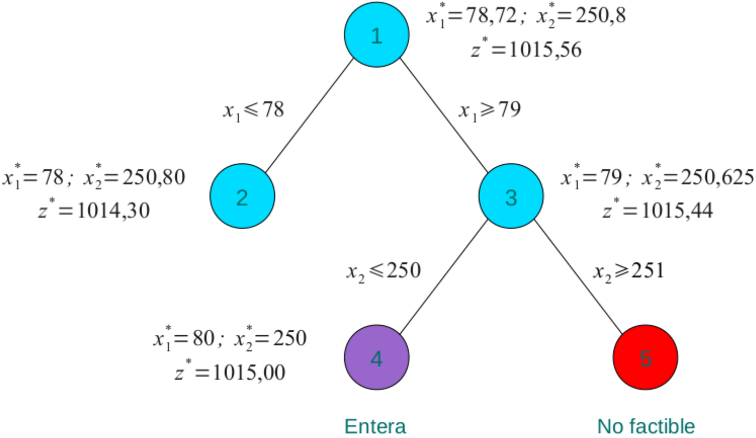
$8x_1 + 12x_2 \geq 3000$

$1/8x_1 + 1/5x_2 \leq 60$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \geq 0$

Representación de la solución

El algoritmo de ramificación y acotamiento se puede representar mediante un diagrama de árbol que muestra el progreso en la búsqueda de la solución entera óptima:



- En la cosecha de un rodal, el volumen total de madera a arrastrar es de 5000 m^3 y se debe decidir cuanto será asignado a dos medios diferentes: tractor agrícola y motoarrastradores.
- Todos los rollizos deben ser arrastrados desde el rodal hasta una playa de trozas en la que serán cargados en camiones y trasladados hasta la industria.
- Para operar con los tractores se necesita preparar una playa de trozas que cuesta \$600, mientras que para los motoarrastradores la playa necesaria cuesta \$1000.
- Por otra parte, si se decide operar con los dos medios, la playa costaría \$1600.

- Los costos de arrastrar con tractores se han estimado en $\$12/m^3$ y los de hacerlo con motoarrastradores en $\$10/m^3$.
- Si se desea minimizar el costo total de arrastrar la madera, incluyendo el costo de construir la playa de trozas, y se define a x_1 y x_2 como los volúmenes de madera a ser arrastrados por tractores y motoarrastradores (en m^3), respectivamente, entonces la función objetivo se puede escribir como:

$$\min z = 12x_1 + 10x_2 + \begin{cases} 600 & \text{si} \quad x_1 > 0 \text{ y } x_2 = 0 \\ 1000 & \text{si} \quad x_1 = 0 \text{ y } x_2 > 0 \\ 1600 & \text{si} \quad x_1 > 0 \text{ y } x_2 > 0 \end{cases}$$

Para formular este problema como un programa lineal se pueden definir variables accesorias y restricciones accesorias:

$$y_1 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_1 = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x_1 > 0 \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_2 = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x_2 > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto la función el problema se formula como:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & z = 12x_1 + 10x_2 + 600y_1 + 1000y_2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 = 5000 \\ & x_1 \leqslant 5000y_1 \\ & x_2 \leqslant 5000y_2 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \\ & y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$