UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

# Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Programación Entera

Víctor Viana

victor.viana@noreste.udelar.edu.uy

26/5/2026

- ¿Que sucede si solo tiene sentido que las variables tomen valores enteros?
- Por ejemplo si lo que fabricamos son artículos indivisibles, o si lo que se quiere representar son personas.
- Limitaciones para modelar toma de decisiones.

# Definiciones

- Un problema de *programación lineal* ***entera*** es un problema de programación lineal con la restricción adicional de que **algunas de las variables deben tomar valores enteros**.
- Cuando **todas las variables deben** tomar valores enteros decimos que se trata de un **problema de programación lineal entera puro**, en caso contrario decimos que es **mixto**.
- Diremos que una variable es **binaria** si solo puede tomar los valores 0 y 1.
- Una gran variedad de problemas combinatorios pueden ser planteados como problemas de programación lineal entera.

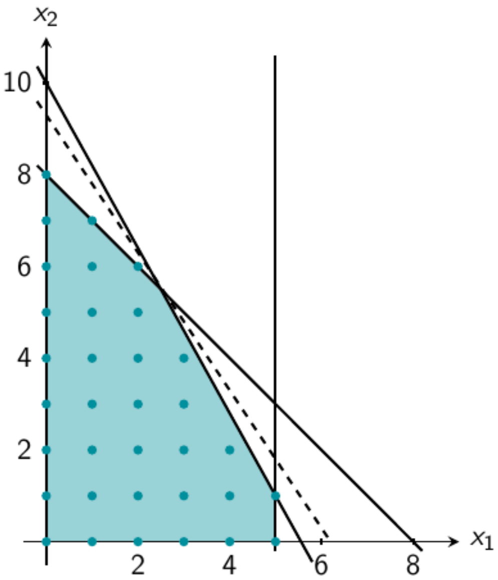
# Aplicaciones

- Ciertas cantidades solo tiene sentido que tomen valores enteros, por ejemplo:
  - hombres (planificación de recursos humanos), plantas de tratamiento de aguas residuales (ubicación de instalaciones), etc.
- Toma de decisiones binarias:
  - Producir o no cierto producto (planificación de la producción)
  - Asignación de una tarea a un trabajador o máquina (problema de asignación)
  - Asignación de un bloque horario y aula a un curso (planificación horaria)
  - Linealización, disyunciones, función lineal a trozos, etc.

# Complejidad

- La inclusión de variables enteras, especialmente binarias ($\in \{0, 1\}$), incrementa enormemente el poder de expresión de los modelos.
- Aumenta la complejidad computacional. Es un problema difícil en general, por lo tanto:
  - no se conocen algoritmos polinomiales para resolverlo
  - instancias de tamaño pequeño pueden requerir mucho tiempo de computo para resolverlas.

# Complejidad (cont.)



# Ejemplo

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & z = x_1 + x_2 & & \\
\text{s.a.} & -2x_1 + 2x_2 & \geq & 1 \\
 & -8x_1 + 10x_2 & \leq & 13 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

$$x^* = (1, 2)$$

$$z^* = 3$$

$$x^*_{LP} = (4, 4.5)$$

$$z^*_{LP} = 9.5$$

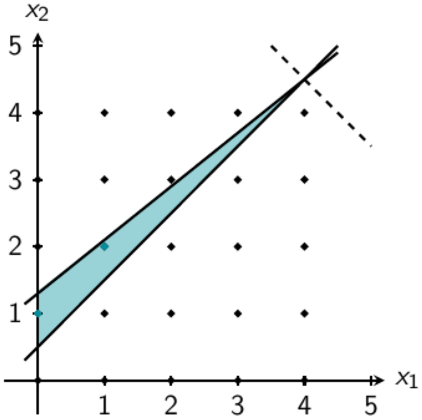



**Figura:** Hay casos donde redondear a enteros resulta en un punto no factible.

# Problema de la mochila (Knapsack problem)

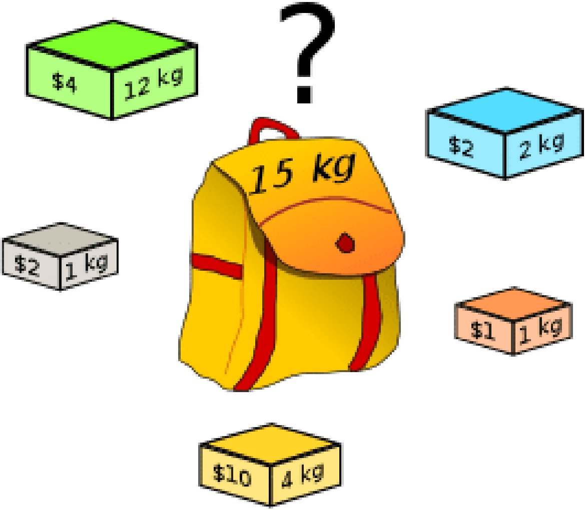
- Dado n objetos $v_1,\ldots,v_n$ con ganancia $g_i$ y peso $a_i$ para i = 1,...,n y una mochila con capacidad b.
- Objetivo: Encontrar la forma de llenar la mochila sin superar su capacidad obteniendo la mayor ganancia posible.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si colocamos al objeto } v_i \text{ en la mochila} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \max \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ & x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \ldots, n \end{array}$$

# Ejemplo (cont.)



# Ejemplo: problema de asignación

Dadas n personas y n tareas, se debe asignar una tarea a cada persona.
Si a la persona i se le asigna la tarea j se incurre en un costo $c_{ij}$.
El objetivo es establecer la asignación de costo mínimo.
Variables:

- $x_{ij} = 1$ si a la persona i se le asigna la tarea j,
- $x_{ij} = 0$ en otro caso

Objetivo, minimizar el costo de la asignación:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

# Problema de asignación, restricciones

Cada persona realiza una tarea:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i = 1, ..., n$$

Cada tarea es realizada por una persona:

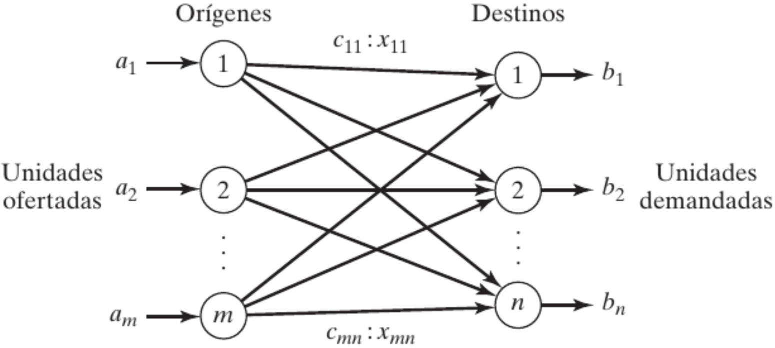
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j = 1, ..., n$$

Variables binarias: $x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, ..., n, j = 1, ..., n.$

# Ejemplo: problema del transporte

- Sean m proveedores y n clientes de un producto.
- El proveedor i puede suministrar $a_i$ unidades y el cliente j demanda $b_j$ unidades.
- Se asume que los totales suministrado y demandado coinciden.
- Al transportar del proveedor i al cliente j se incurre en un costo unitario $c_{ij}$ .
- El problema consiste en transportar a costo mínimo el producto desde los proveedores a los clientes.

## Ejemplo: problema del transporte (cont.)



# Ejemplo: problema del transporte (cont.)

Modelo matemático:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \forall i = 1, \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$$

Comentario: El problema de asignación es un caso especial de este. En el que la cantidad de proveedores y clientes coinciden, y todos ellos tienen una única unidad de suministro/demanda.

Una empresa debe distribuir 66 unidades de un producto desde sus tres almacenes a sus cuatro clientes. La cantidad de producto que tiene en cada almacén es 30, 25 y 11 unidades, respectivamente. La demanda que solicita cada cliente es 15, 17, 22 y 12 unidades de producto, respectivamente. El costo de transportar una unidad de producto desde cada almacén a cada cliente viene dado por la siguiente tabla:

| Almacén | cliente 1 | cliente 2 | cliente 3 | cliente 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 2 | 6 | 7 |
| 2 | 4 | 9 | 5 | 3 |
| 3 | 8 | 8 | 1 | 5 |

Plantear un modelo matemático para determinar la cantidad de producto que conviene transportar desde cada almacén a cada cliente para satisfacer la demanda de éstos con el menor costo de transporte posible.

# Aplicación (cont.)

Sea $x_{ij}$ la variable que determina la cantidad de producto que conviene transportar desde un almacén $i$ a un cliente $j (i \in \{1,2,3\}$ y $j \in \{1,2,3,4\})$.

# Aplicación (cont.)

Entonces, un modelo matemático es

$$\min 6x_{11} + 2x_{12} + 6x_{13} + 7x_{14} + 4x_{21} + 9x_{22} +$$
$$5x_{23} + 3x_{24} + 8x_{31} + 8x_{32} + 1x_{33} + 5x_{34}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 30 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 25 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 11 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 15 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 17 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 22 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 12 \\
x_{ij} \in \mathbb{Z}, \ \forall i \in \{1, 2, 3\} \text{ y } \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}&.
\end{aligned}$$