UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Dualidad

Víctor Viana

victor.viana@noreste.udelar.edu.uy

22/5/2026

Contenido

Introducción a dualidad

- La teoría de dualidad establece la relación estructural complementaria entre dos problemas de programación lineal: uno denominado **primal** y el otro denominado **dual**.
- a cada problema de programación lineal (el problema primal) podemos asociar otro problema de programación lineal (el problema dual).
- Estos dos problemas están estrechamente relacionados entre sí y un análisis del problema dual puede proporcionar una visión profunda del problema primario.

Problemas Primal y Dual

Todo problema de programación lineal(primal), existe otro problema lineal llamado dual.

Problema primal	*Problema dual*
Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$	Minimizar $W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$
sujeta a	sujeta a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$ para $i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,$ para $j = 1, 2, \ldots, n$
y	y
$x_j \geq 0,$ para $j = 1, 2, \ldots, n.$	$y_i \geq 0,$ para $i = 1, 2, \ldots, m.$

Problemas Primal y Dual

Forma Matricial

Problema primal	*Problema dual*
Maximizar $Z = \mathbf{cx}$,	Minimizar $W = \mathbf{yb}$,
sujeta a	sujeta a
$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{yA} \geq \mathbf{c}$
y	y
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.	$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Ejemplo

Problema primal
en forma algebraica

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & Z = 3x_1 + 5x_2, \\
\text{sujeta a} & \\
& \begin{aligned} x_1 \qquad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned} \\
\text{y} & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Problema dual
en forma algebraica

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3, \\
\text{sujeta a} & \\
& \begin{aligned} y_1 \qquad + 3y_3 &\geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \end{aligned} \\
\text{y} & \\
& y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Problema primal
en forma de matriz

Maximizar $Z = [3,\ 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$

sujeta a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problema dual
en forma de matriz

Minimizar $W = [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

sujeta a

$$[y_1,\ y_2,\ y_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq [3,\ 5]$$

y

$$[y_1,\ y_2,\ y_3] \geq [0,\ 0,\ 0].$$

Caso general

			Problema primal					
			Coeficiente de:				Lado derecho	
			x_1	x_2	$\cdots$	x_n		
Problema dual	Coeficiente de:	y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leq b_1$	Coeficientes de la función objetivo (minimizar)
		y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leq b_2$	
		$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	
		y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leq b_m$	
	Lado derecho		VI c_1	VI c_2	$\cdots$ $\cdots$	VI c_n		
			Coeficientes de la función objetivo (maximizar)					

Caso general(cont.)

	MINIMIZATION PROBLEM	MAXIMIZATION PROBLEM	
VARIABLES	≥ 0 ≤ 0 UNRESTRICTED	$\leq$ $\geq$ $=$	CONSTRAINTS
CONSTRAINTS	$\geq$ $\leq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 UNRESTRICTED	VARIABLES

Volviendo al ejemplo

	x_1	x_2	
y_1	1	0	≤ 4
y_2	0	2	≤ 12
y_3	3	2	≤ 18
	VI	VI	
	3	5	

Maximizar $\quad Z = 3x_1 + 5x_2,$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\; &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

y $\quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Minimizar $\quad W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3,$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad + 3y_3 &\geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

y

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Modelos PL a la forma estándar

Forma no estándar	**Forma estándar equivalente**
Minimizar Z	Maximizar $(-Z)$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$	$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ y $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_i$
x_j sin restricción de signo	$x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+ \geq 0, \quad x_j^- \geq 0$

Modelos PL a la forma estándar (cont.)

Problema dual

Minimizar $W = \mathbf{yb}$,
sujeta a
$$\mathbf{yA} \geq \mathbf{c}$$
y
$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Convertido a forma estándar

Maximizar $(-W) = -\mathbf{yb}$,
sujeta a
$$-\mathbf{yA} \leq -\mathbf{c}$$
y
$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Su problema dual

Minimizar $(-Z) = -\mathbf{cx}$,
sujeta a
$$-\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b}$$
y
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Convertido a forma estándar

Maximizar $Z = \mathbf{cx}$,
sujeta a
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$
y
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Formas primal-dual correspondientes

Etiqueta	Problema primal (o problema dual)	Problema dual (o problema primal)
	Maximizar Z (o W)	Minimizar W (o Z)
	Restricción i:	Variable y_i (o x_i):
Común	$\leq$ forma $\longleftrightarrow$	$y_i \geq 0$
Extraña	$=$ forma $\longleftrightarrow$	No restringida
Rara	$\geq$ forma $\longleftrightarrow$	$y_i' \leq 0$
	Variable x_j (o y_j):	Restricción j:
Común	$x_j \geq 0$ $\longleftrightarrow$	$\geq$ forma
Extraña	No restringida $\longleftrightarrow$	$=$ forma
Rara	$x_j' \leq 0$ $\longleftrightarrow$	$\leq$ forma

Ejemplo

Problema primal			*Problema dual*	
Maximizar	$-Z = -0.4x_1 - 0.5x_2,$		Minimizar $W = 2.7y_1 + 6y_2 + 6y_3',$	
sujeta a			sujeta a	
(C)	$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$	$\longleftrightarrow$	$y_1 \geq 0$	(C)
(E)	$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$	$\longleftrightarrow$	y_2 no restringida en signo	(E)
(R)	$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$	$\longleftrightarrow$	$y_3' \leq 0$	(R)
y			y	
(C)	$x_1 \geq 0$	$\longleftrightarrow$	$0.3y_1 + 0.5y_2 + 0.6y_3' \geq -0.4$	(C)
(C)	$x_2 \geq 0$	$\longleftrightarrow$	$0.1y_1 + 0.5y_2 + 0.4y_3' \geq -0.5$	(C)

Propiedades de las dualidad

- **DÉBIL**: Si x es una solución factible para el problema primal e y es una solución factible para el problema dual, entonces: $cx \leqslant yb$
- **FUERTE**: Si x* es una solución óptima para el problema primal e y* es una solución óptima para el problema dual, entonces: $cx^* = y^*b$

Teorema de la dualidad

Las siguientes son las únicas relaciones posibles entre los problemas primal y dual.

1. Si un problema tiene **soluciones factibles y una función objetivo acotada** (y, por ende, una solución óptima), entonces ocurre lo mismo con el otro problema, de manera que se aplican tanto la propiedad de dualidad débil como la fuerte.
2. Si uno de los problemas tiene **soluciones factibles y una función objetivo no acotada** (es decir, no tiene solución óptima), entonces el otro problema no tiene soluciones factibles.
3. Si un problema **no tiene soluciones factibles**, entonces el otro problema no tiene soluciones factibles o bien la función objetivo es no acotada.

Interpretación económica de la dualidad

PRIMAL (Comerciante)
Maximizar Utilidad
Recursos

DUAL (Fabricante)
Minimizar Costos
Producción

Precio sombra

- Cuando la empresa trata de minimizar el costo de una función de producción, conoce los precios de los factores de producción que va a utilizar, pero no conoce el precio del producto que va a lanzar al mercado.
- La empresa puede asignar unos precios a esa producción a través de los "precios sombra" calculando su costo de oportunidad.

Precio sombra (cont.)

- Los precios sombra nos indican cómo el valor máximo o mínimo de la función objetivo responde a un cambio unitario en la restricción o condición.
- Por ejemplo, el precio sombra de la producción expresa cuánto va a aumentar el costo mínimo si se obtiene una unidad más de producto.

Ejemplo: Problema de la dieta

- El problema trata de la selección de alimentos que satisfacen requisitos nutricionales a costo mínimo.
- Dado un conjunto de alimentos, con su información nutricional y precio, el objetivo es seleccionar las cantidades de los alimentos a adquirir de forma de minimizar el costo de la dieta, mientras se cumple con requisitos nutricionales.
- Estos requisitos se establecen como cotas mínimas de algunos nutrientes (componentes) de los alimentos.

Problema de la dieta (instancia)

Sean los contenidos de nutrientes y precios de cinco alimentos, con requisitos mínimos diarios de los nutrientes:

Alimento	Grasas (g)	Proteínas (g)	Carbohidratos (g)	Precio ($)
Leche (L)	20	34	49	24
Carne (kg)	250	180	0	190
Arroz (kg)	2.5	67	780	32
Papa (kg)	1	21	170	25
Tomate (kg)	2	11	47	50
Requisitos (/día)	60	120	280	

Problema de la dieta (formulación inicial)

El objetivo es determinar la cantidad diaria de cada alimento a adquirir mediante las variables x_L, x_C, x_A, x_P , y x_T . De forma de minimizar el costo de la dieta, mientras se cumple con requisitos nutricionales. La formulación del problema es:

$$
\begin{array}{lll}
\min & 24x_L + 190x_C + 32x_A + 25x_P + 50x_T & \\
\text{s.a.} & 20x_L + 250x_C + 2.5x_A + x_P + 2x_T \geq 60, & \text{(Grasas)} \\
& 34x_L + 180x_C + 67x_A + 21x_P + 11x_T \geq 120, & \text{(Proteínas)} \\
& 49x_L + 780x_A + 170x_P + 47x_T \geq 280, & \text{(Carbohidratos)} \\
& x_L, x_C, x_A, x_P, x_T \geq 0. &
\end{array}
$$

Luego de resolver el problema se obtiene la dieta óptima con costo \$80.3187, que satisface los requerimientos a partir de la selección de las cantidades de 0.2869 kg de Arroz y 2.9641 L de Leche; no se seleccionan Carne, Papa y Tomate.

Formulación de suplemento alimenticio

- Se considera el problema de formular suplementos alimenticios, a partir de nutrientes, para la venta en el mercado.
- El objetivo es determinar el precio en el mercado de cada nutriente a vender mediante las variables p_G, p_P y p_C , de forma de maximizar el beneficio.

Teniendo en cuenta, formulación mediante, de no superar los precios de los alimentos en el mercado. Por lo que la formulación alternativa es

$$
\begin{array}{lll}
\max & 60p_G + 120p_P + 280p_C & \\
\text{s.a.} & 20p_G + 34p_P + 49p_C \leq 24, & \text{(Leche)} \\
& 250p_G + 180p_P \leq 190, & \text{(Carne)} \\
& 2.5p_G + 67p_P + 780p_C \leq 32, & \text{(Arroz)} \\
& p_G + 21p_P + 170p_C \leq 25, & \text{(Papa)} \\
& 2p_G + 11p_P + 47p_C \leq 50, & \text{(Tomate)} \\
& p_G, p_P, p_C \geq 0. &
\end{array}
$$

Problema de la dieta (resolución)

Luego de resolver el problema se obtiene la formulación óptima con precio \$80.3187, que satisface los precios del mercado a partir de la selección de los precios de \$0.4143/g para la Grasa y \$0.4622/g para la Proteína, no se incluye Carbohidratos.

Problema de la dieta (discusión)

- En el óptimo los valores de ambos problemas coinciden: el costo del comprador de la dieta (primal) iguala el beneficio del vendedor de la formulación (dual).
- Los valores óptimos de los precios de los nutrientes establecen la valoración marginal de los alimentos, y los valores óptimos de las cantidades de los alimentos establecen la valoración marginal de los nutrientes.
- Por ejemplo, para el nutriente Grasa se tiene el precio de $ 0.4143/g, el cual es el valor marginal de un cambio en la disponibilidad de dicho nutriente, es decir que si se aumenta la cantidad de grasa mínima requerida en una unidad, el valor del óptimo ($80.3187) asciende en $0.4143.

Se puede ver que cuando el valor de la restricción no coincide con el valor del término independiente, es decir que la restricción no está activa, la variable correspondiente en el problema primal o dual es cero.

	Primal	**Dual**
Alimento	Variable	Restricción (Valor$\sim$TI)
Leche	2.9641	$24 = 24$
Carne	0	$186.773 < 190$
Arroz	0.2869	$32 = 32$
Papa	0	$10.120 < 25$
Tomate	0	$5.912 < 50$
Nutriente	Restricción (Valor$\sim$TI)	Variable
Grasa	$60 = 60$	0.4143
Proteína	$120 = 120$	0.4622
Carbohidrato	$368.988 > 280$	0

Por ejemplo, para el alimento Carne, en el caso del problema dual se tiene que su restricción no esta activa, el valor de los nutrientes que aporta la carne es menor que el precio del mercado. Ocurre lo mismo para la Papa y el Tomate.