



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Dualidad

Víctor Viana

victor.viana@cut.edu.uy

25/4/2024

Introducción a dualidad

Problema primal y dual

Ejemplo: Problema de la dieta

- ▶ La teoría de dualidad establece la relación estructural complementaria entre dos problemas de programación lineal: uno denominado **primal** y el otro denominado **dual**.
- ▶ a cada problema de programación lineal (el problema primal) podemos asociar otro problema de programación lineal (el problema dual).
- ▶ Estos dos problemas están estrechamente relacionados entre sí y un análisis del problema dual puede proporcionar una visión profunda del problema primario.

Todo problema de programación lineal(primal), existe otro problema lineal llamado dual.

Problema primal

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

y

$$x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Problema dual

$$\text{Minimizar } W = \sum_{i=1}^m b_i y_i,$$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

y

$$y_i \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Forma Matricial

Problema primal

Maximizar $Z = \mathbf{c}\mathbf{x}$,

sujeta a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

y

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Problema dual

Minimizar $\mathbf{W} = \mathbf{y}\mathbf{b}$,

sujeta a

$$\mathbf{y}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}$$

y

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

*Problema primal
en forma algebraica*

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2,$

sujeta a

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

y $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

*Problema dual
en forma algebraica*

Minimizar $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3,$

sujeta a

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

y

$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$

*Problema primal
en forma de matriz*

$$\text{Maximizar } Z = [3, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

sujeta a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Problema dual
en forma de matriz*

$$\text{Minimizar } W = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

sujeta a

$$[y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq [3, 5]$$

y

$$[y_1, y_2, y_3] \geq [0, 0, 0].$$

		Problema primal					Lado derecho	Coeficientes de la función objetivo (minimizar)
		Coeficiente de:						
		x_1	x_2	...	x_n			
Problema dual	Coeficiente de:	y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq b_1$	
	y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\leq b_2$		
		
	y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$		
Lado derecho		VI	VI	...	VI			
		c_1	c_2	...	c_n			
		Coeficientes de la función objetivo (maximizar)						

	MINIMIZATION PROBLEM	MAXIMIZATION PROBLEM	
VARIABLES	≥ 0 ≤ 0 UNRESTRICTED	\longleftrightarrow	≤ 0 ≥ 0 $=$ CONSTRAINTS
CONSTRAINTS	≥ 0 ≤ 0 $=$	\longleftrightarrow	≤ 0 ≥ 0 UNRESTRICTED VARIABLES

	x_1	x_2	
y_1	1	0	≤ 4
y_2	0	2	≤ 12
y_3	3	2	≤ 18
	VI	VI	
	3	5	

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,
 sujeta a

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

y $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Minimizar $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$,
 sujeta a

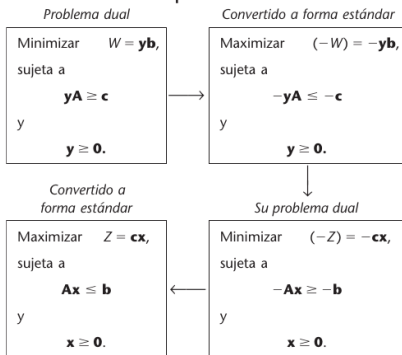
$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

y

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Forma no estándar	Forma estándar equivalente
Minimizar Z $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ x_j sin restricción de signo	Maximizar $(-Z)$ $-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i$ $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{y} \quad -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i$ $x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+ \geq 0, \quad x_j^- \geq 0$



Etiqueta	Problema primal (o problema dual)	Problema dual (o problema primal)
	Maximizar Z (o W)	Minimizar W (o Z)
Común Extraña Rara	Restricción i : \leq forma \leftarrow $=$ forma \leftarrow \geq forma \leftarrow	Variable y_i (o x_i): $y_i \geq 0$ No restringida $y_i' \leq 0$
Común Extraña Rara	Variable x_j (o y_j): $x_j \geq 0$ \leftarrow No restringida \leftarrow $x_j' \leq 0$ \leftarrow	Restricción j : \geq forma $=$ forma \leq forma

Problema primal

Maximizar $-Z = -0.4x_1 - 0.5x_2,$

sujeta a

(C) $0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$

(E) $0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$

(R) $0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$

y

(C) $x_1 \geq 0$

(C) $x_2 \geq 0$

Problema dual

Minimizar $W = 2.7y_1 + 6y_2 + 6y_3,$

sujeta a

$y_1 \geq 0$ (C)

y_2 no restringida en signo (E)

$y_3 \leq 0$ (R)

y

$0.3y_1 + 0.5y_2 + 0.6y_3 \geq -0.4$ (C)

$0.1y_1 + 0.5y_2 + 0.4y_3 \geq -0.5$ (C)

- ▶ **DÉBIL:** Si x es una solución factible para el problema primal e y es una solución factible para el problema dual, entonces: $cx \leq yb$
- ▶ **FUERTE:** Si x^* es una solución óptima para el problema primal e y^* es una solución óptima para el problema dual, entonces:
 $cx^* = y^*b$

Las siguientes son las únicas relaciones posibles entre los problemas primal y dual.

1. Si un problema tiene **soluciones factibles y una función objetivo acotada** (y, por ende, una solución óptima), entonces ocurre lo mismo con el otro problema, de manera que se aplican tanto la propiedad de dualidad débil como la fuerte.
2. Si uno de los problemas tiene **soluciones factibles y una función objetivo no acotada** (es decir, no tiene solución óptima), entonces el otro problema no tiene soluciones factibles.
3. Si un problema **no tiene soluciones factibles**, entonces el otro problema no tiene soluciones factibles o bien la función objetivo es no acotada.

PRIMAL (Comerciante)
Maximizar Utilidad
Recursos

DUAL (Fabricante)
Minimizar Costos
Producción

- ▶ Cuando la empresa trata de minimizar el costo de una función de producción, conoce los precios de los factores de producción que va a utilizar, pero no conoce el precio del producto que va a lanzar al mercado.
- ▶ La empresa puede asignar unos precios a esa producción a través de los “precios sombra” calculando su costo de oportunidad.



- ▶ Los precios sombra nos indican cómo el valor máximo o mínimo de la función objetivo responde a un cambio unitario en la restricción o condición.
- ▶ Por ejemplo, el precio sombra de la producción expresa cuánto va a aumentar el costo mínimo si se obtiene una unidad más de producto.

- ▶ El problema trata de la selección de alimentos que satisfacen requisitos nutricionales a costo mínimo.
- ▶ Dado un conjunto de alimentos, con su información nutricional y precio, el objetivo es seleccionar las cantidades de los alimentos a adquirir de forma de minimizar el costo de la dieta, mientras se cumple con requisitos nutricionales.
- ▶ Estos requisitos se establecen como cotas mínimas de algunos nutrientes (componentes) de los alimentos.

Sean los contenidos de nutrientes y precios de cinco alimentos, con requisitos mínimos diarios de los nutrientes:

Alimento	Grasas (g)	Proteínas (g)	Carbohidratos (g)	Precio (\$)
Leche (L)	20	34	49	24
Carne (kg)	250	180	0	190
Arroz (kg)	2.5	67	780	32
Papa (kg)	1	21	170	25
Tomate (kg)	2	11	47	50
Requisitos (/día)	60	120	280	

El objetivo es determinar la cantidad diaria de cada alimento a adquirir mediante las variables x_L, x_C, x_A, x_P , y x_T . De forma de minimizar el costo de la dieta, mientras se cumple con requisitos nutricionales. La formulación del problema es:

$$\begin{aligned} \min \quad & 24x_L + 190x_C + 32x_A + 25x_P + 50x_T \\ \text{s.a.} \quad & 20x_L + 250x_C + 2.5x_A + x_P + 2x_T \geq 60, & \text{(Grasas)} \\ & 34x_L + 180x_C + 67x_A + 21x_P + 11x_T \geq 120, & \text{(Proteínas)} \\ & 49x_L + 780x_A + 170x_P + 47x_T \geq 280, & \text{(Carbohidratos)} \\ & x_L, x_C, x_A, x_P, x_T \geq 0. \end{aligned}$$



Luego de resolver el problema se obtiene la dieta óptima con costo \$80.3187, que satisface los requerimientos a partir de la selección de las cantidades de 0.2869 kg de Arroz y 2.9641 L de Leche; no se seleccionan Carne, Papa y Tomate.

- ▶ Se considera el problema de formular suplementos alimenticios, a partir de nutrientes, para la venta en el mercado.
- ▶ El objetivo es determinar el precio en el mercado de cada nutriente a vender mediante las variables p_G , p_P y p_C , de forma de maximizar el beneficio.



Teniendo en cuenta, formulación mediante, de no superar los precios de los alimentos en el mercado. Por lo que la formulación alternativa es

$$\begin{aligned} \max \quad & 60p_G + 120p_P + 280p_C \\ \text{s.a.} \quad & 20p_G + 34p_P + 49p_C \leq 24, & \text{(Leche)} \\ & 250p_G + 180p_P \leq 190, & \text{(Carne)} \\ & 2.5p_G + 67p_P + 780p_C \leq 32, & \text{(Arroz)} \\ & p_G + 21p_P + 170p_C \leq 25, & \text{(Papa)} \\ & 2p_G + 11p_P + 47p_C \leq 50, & \text{(Tomate)} \\ & p_G, p_P, p_C \geq 0. \end{aligned}$$



Luego de resolver el problema se obtiene la formulación óptima con precio \$80.3187, que satisface los precios del mercado a partir de la selección de los precios de \$0.4143/g para la Grasa y \$0.4622/g para la Proteína, no se incluye Carbohidratos.

- ▶ En el óptimo los valores de ambos problemas coinciden: el costo del comprador de la dieta (primal) iguala el beneficio del vendedor de la formulación (dual).
- ▶ Los valores óptimos de los precios de los nutrientes establecen la valoración marginal de los alimentos, y los valores óptimos de las cantidades de los alimentos establecen la valoración marginal de los nutrientes.
- ▶ Por ejemplo, para el nutriente Grasa se tiene el precio de \$ 0.4143/g, el cual es el valor marginal de un cambio en la disponibilidad de dicho nutriente, es decir que si se aumenta la cantidad de grasa mínima requerida en una unidad, el valor del óptimo (\$80.3187) asciende en \$0.4143.

Se puede ver que cuando el valor de la restricción no coincide con el valor del término independiente, es decir que la restricción no está activa, la variable correspondiente en el problema primal o dual es cero.

	Primal	Dual
Alimento	Variable	Restricción (Valor~TI)
Leche	2.9641	24 = 24
Carne	0	186.773 < 190
Arroz	0.2869	32 = 32
Papa	0	10.120 < 25
Tomate	0	5.912 < 50
Nutriente	Restricción (Valor~TI)	Variable
Grasa	60 = 60	0.4143
Proteína	120 = 120	0.4622
Carbohidrato	368.988 > 280	0

Por ejemplo, para el alimento Carne, en el caso del problema dual se tiene que su restricción no esta activa, el valor de los nutrientes que aporta la carne es menor que el precio del mercado. Ocurre lo mismo para la Papa y el Tomate.