



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Análisis de Sensibilidad

Víctor Viana

victor.viana@cut.edu.uy

25/4/2024

Introducción al análisis de sensibilidad

Ejemplo de análisis de sensibilidad

- ▶ En la mayoría de los problemas reales podría ser que los datos no se conozcan exactamente o puede haber cambios imprevistos en la información, por ejemplo en los costos o precios.
- ▶ También a veces se quieren analizar los efectos de aumentar los recursos, de cambiar los coeficientes tecnológicos, etc.



- ▶ ¿Cómo podemos ver cuán sensible a los cambios en los datos es la solución óptima que obtuvimos?
- ▶ ¿Cómo podemos analizar como cambiaría la solución sin resolver de nuevo el problema?.
- ▶ ¿Cómo seguimos optimizando si la solución actual no es óptima para los nuevos datos?

- ▶ El objetivo es poder analizar la sensibilidad de la solución de un problema ante cambios de los parámetros de este.
- ▶ En particular es analizar la dependencia del valor del óptimo y la solución óptima con respecto a los coeficientes de las restricciones, los términos independientes y los coeficientes de la función objetivo.

- ▶ Una empresa produce los productos 1 y 2 a partir de la disponibilidad de los insumos A y B. Los productos 1 y 2 se venden a precios \$4 y \$5 la unidad, respectivamente.
- ▶ Se cuenta con los siguientes insumos disponibles, requerimientos y capacidades de estos según los productos:

Insumos	Disponible	Requerimientos	
		Producto 1	Producto 2
A	12	2	3
B	9	2	2
Capacidad		3	-



El objetivo es determinar la cantidad de productos a producir que maximiza el beneficio sujeto a la disponibilidad de insumos y según los requerimientos de insumos para cada producto y las capacidades de producción.

Por cada producto se debe tomar una decisión de la cantidad a producir:

- ▶ x_1 : cantidad de producto 1 a producir
- ▶ x_2 : cantidad de producto 2 a producir



Insumo A:

- ▶ cantidad de insumo usado: $2x_1 + 3x_2$
- ▶ cantidad de insumo disponible: 12

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

Insumo B:

- ▶ cantidad de insumo usado: $2x_1 + 2x_2 \leq 9$
- ▶ cantidad de insumo disponible: 9

$$2x_1 + 2x_2 \leq 9$$

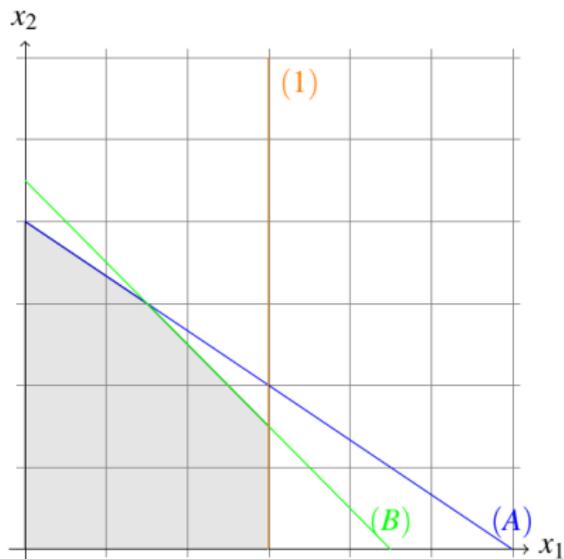
Cap. producción producto 1: $x_1 \leq 3$

No negatividad de las variables de decisión: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

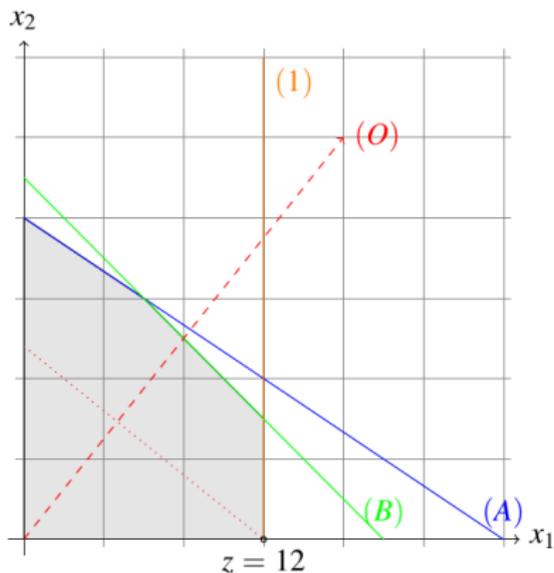
- ▶ El objetivo es establecer un plan de producción que maximice el beneficio.
- ▶ El beneficio esta dado por las ventas de los productos en términos de precios por unidad y cantidades de unidades producidas.
- ▶ Por lo que la función objetivo a ser maximizada es:

$$z = 4x_1 + 5x_2$$

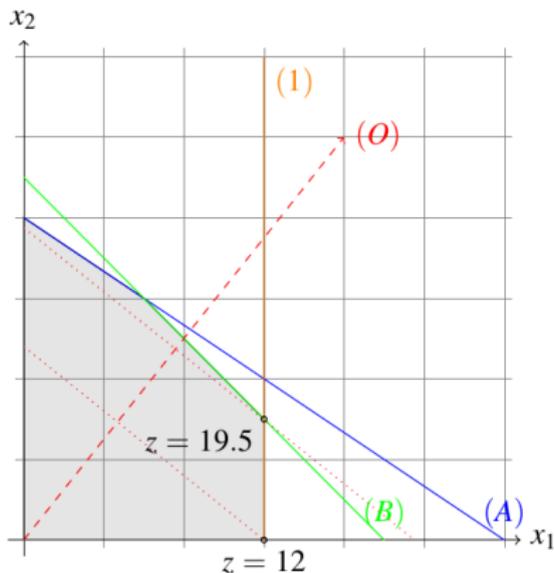
$$\begin{array}{ll} \max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} \max & z = 4x_1 + 5x_2 \quad (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \quad (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, \quad (B) \\ & x_1 \leq 3, \quad (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

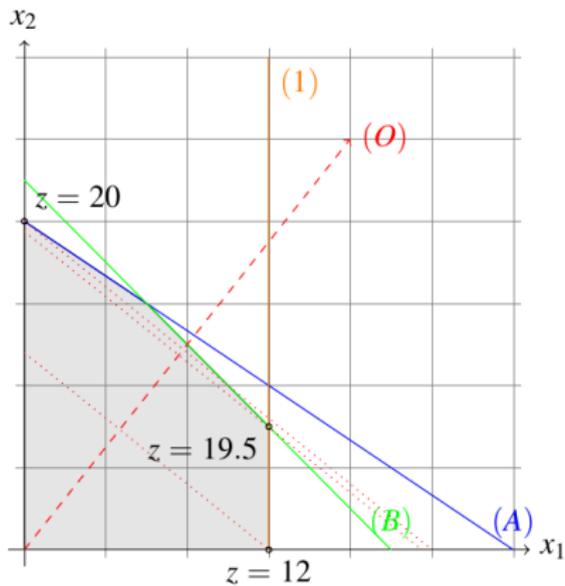


$$\begin{array}{ll} \max & z = 4x_1 + 5x_2 \quad (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \quad (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, \quad (B) \\ & x_1 \leq 3, \quad (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} \max & z = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ & x_1 \leq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

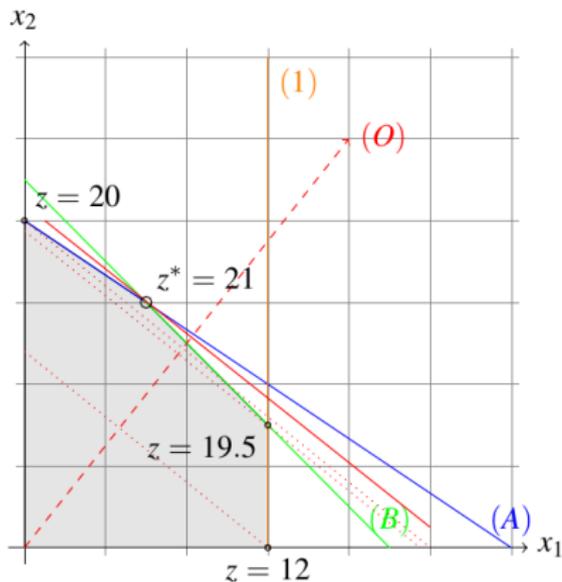
(O)
(A)
(B)
(1)



Formulación y resolución gráfica(V)



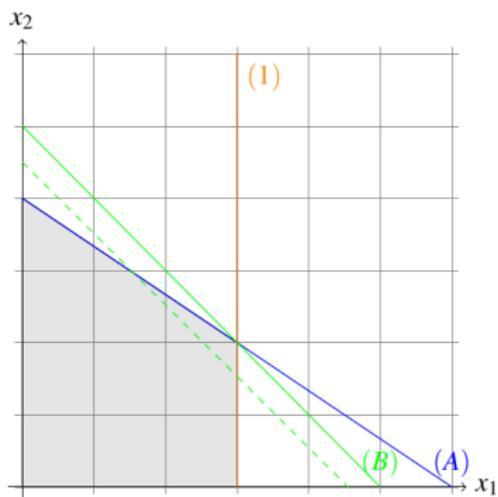
$$\begin{array}{ll} \max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$



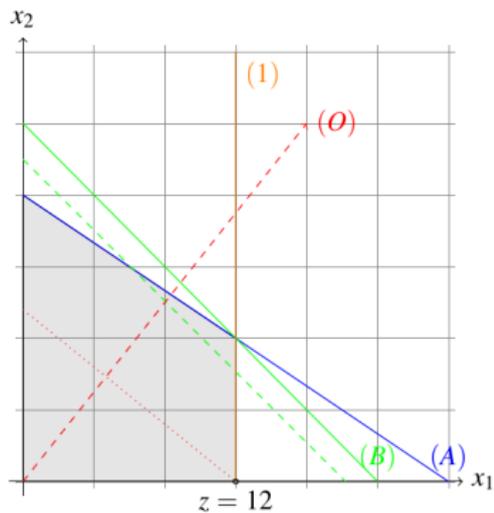
¿Qué ocurre si se dispone de una unidad adicional del insumo B?

$$2x_1 + 2x_2 \leq 9 + 1 \text{ (B)}$$

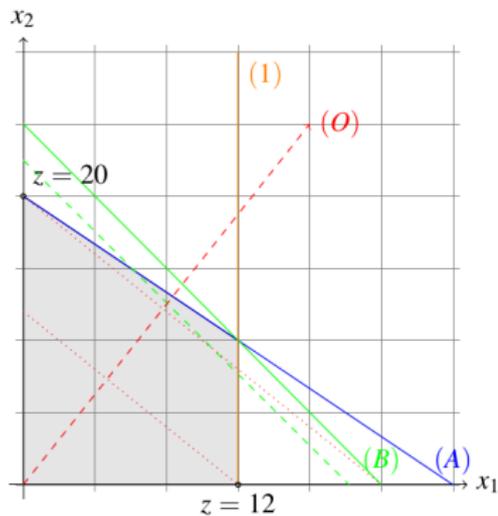
$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 4x_1 + 5x_2 && (O) \\
 \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, && (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 10, && (B) \\
 & x_1 \leq 3, && (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$



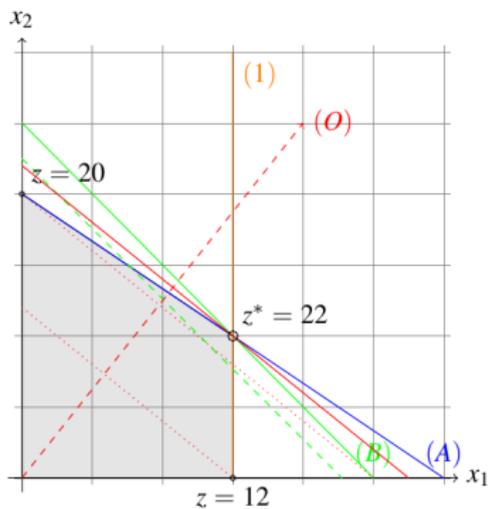
$$\begin{array}{ll}
 \max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
 \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 10, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll}
 \max & z = 4x_1 + 5x_2 \quad (O) \\
 \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \quad (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad (B) \\
 & x_1 \leq 3, \quad (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0.
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll}
 \max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
 \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq \mathbf{10}, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
 \end{array}$$



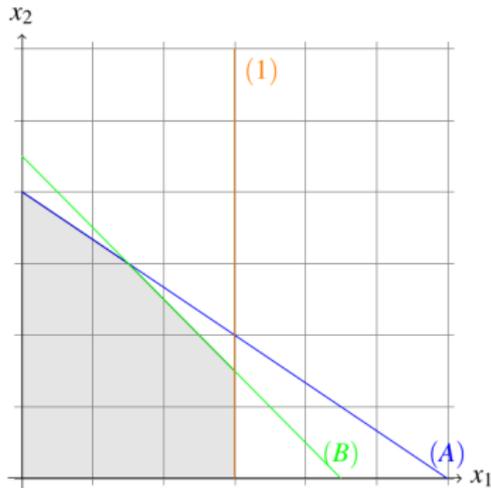
¿Qué ocurre si se disminuye en una unidad el coeficiente del producto 1?

$$z = (4 - 1)x_1 + 5x_2$$

Cambio en coeficiente función objetivo(II)



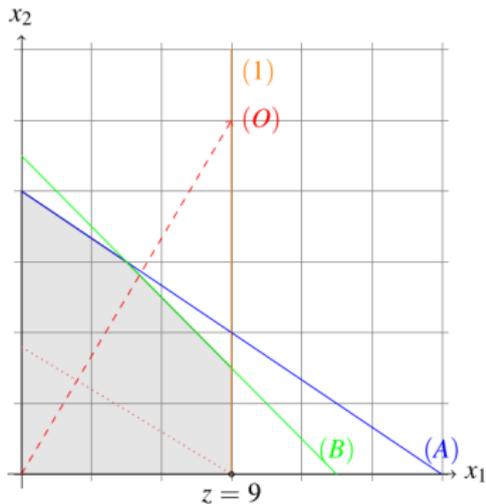
$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$



Cambio en coeficiente función objetivo(III)



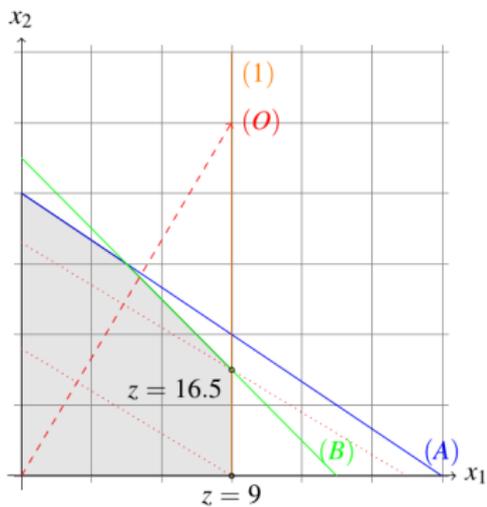
$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Cambio en coeficiente función objetivo(IV)



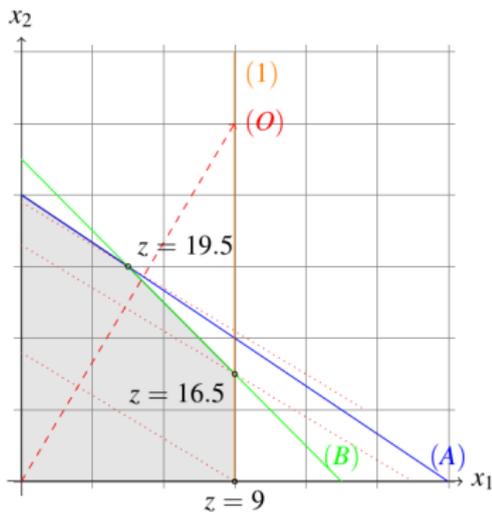
$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$



Cambio en coeficiente función objetivo(V)



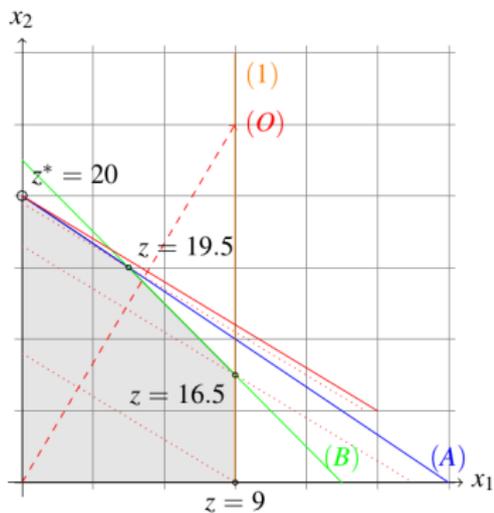
$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$



Cambio en coeficiente función objetivo(VI)



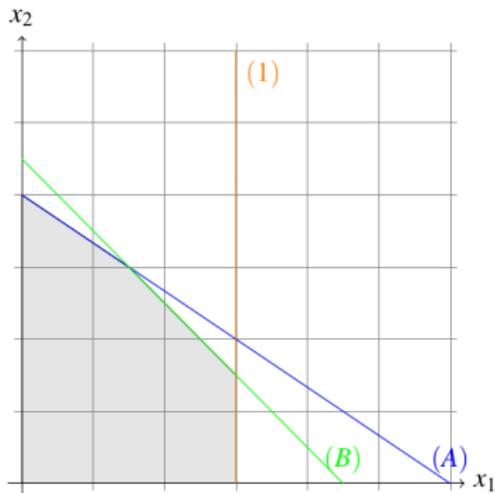
$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 5x_2 \quad (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \quad (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, \quad (B) \\ & x_1 \leq 3, \quad (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$



¿Qué ocurre si se aumenta en una unidad el coeficiente del producto 1?

$$z = (4 + 1)x_1 + 5x_2$$

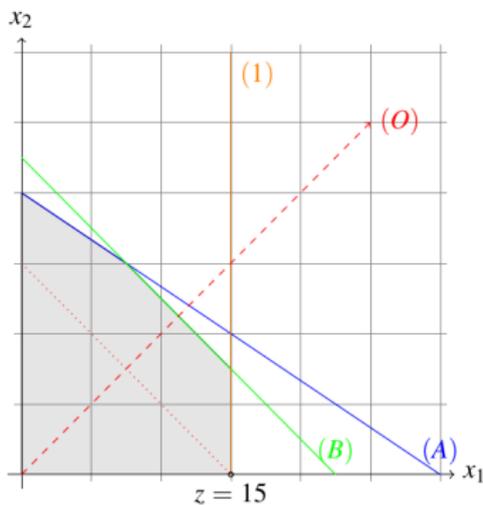
$$\begin{array}{ll} \max & z = 5x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$



Resolución gráfica con múltiples soluciones(II)



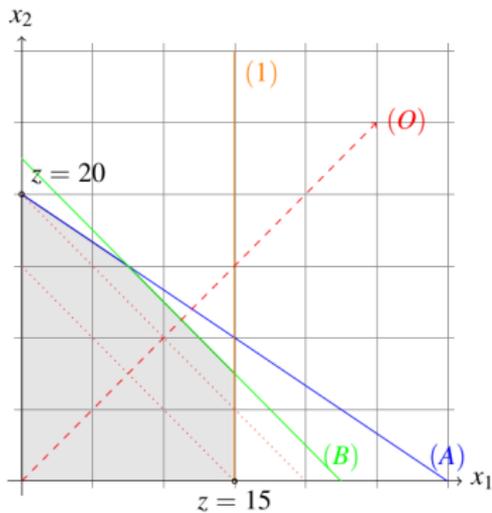
$$\begin{array}{ll} \max & z = 5x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ & x_1 \leq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$



Resolución gráfica con múltiples soluciones(III)



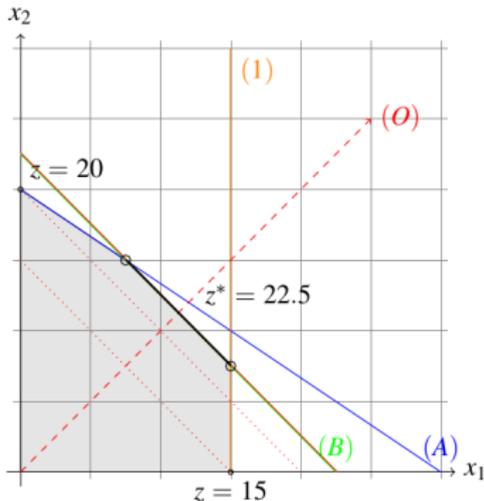
$$\begin{array}{ll} \max & z = 5x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$



Resolución gráfica con múltiples soluciones(IV)



$$\begin{array}{ll} \max & z = 5x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$



Ante cambios en los datos del problema, agregando de variables o restricciones, después de haber obtenido la solución óptima queremos:

- ▶ Saber si la solución actual sigue siendo óptima.
- ▶ En caso de que la solución actual siga siendo óptima, queremos saber si los valores de la solución óptima y de la función objetivo cambian. Si es así, ¿cómo calculamos los nuevos valores?.
- ▶ Si la solución actual ya no es óptima después de los cambios introducidos en el problema, ¿la última solución sigue siendo factible?.
- ▶ ¿Cómo hacemos para reoptimizar a partir de la última solución?.